

Physique des Plasmas I
EPFL — 2015
MER Dr. S. Alberti - CRPP

Contents

1	La Physique des Plasmas: Introduction	7
1.1	Introduction	7
1.2	Les caractéristiques du plasma	10
1.3	Le plasma solaire	11
1.4	Quelques sources de plasma de laboratoire	17
1.4.1	Section efficace	17
2	Écrantage de Debye	28
2.1	Potentiel électrique autour d'une charge dans un plasma	28
2.2	Retour à la caractérisation du plasma	34
3	Collisions dans un plasma et phénomènes de transport	37
3.1	Collisions coulombiennes binaires	37
3.1.1	Propriété d'une particule soumise à un potentiel central	38
3.1.2	Section efficace de Rutherford	40
3.2	Le logarithme coulombien	43
3.3	Fréquence de collisions dans un plasma	47
3.4	Phénomènes de transport	48
3.4.1	Résistivité électrique	48
3.4.2	Chauffage ohmique d'un plasma	50
3.4.3	Transfert d'énergie	50
4	Introduction à la fusion thermonucléaire	52
4.1	Principe	52
4.2	Critère de Lawson – Condition d'ignition	57
4.3	Confinement magnétique	63

5	Mouvement d'une particule dans des champs électriques et magnétiques	71
5.1	Mouvement d'une particule dans un champ électrique constant \mathbf{E}_0 ($\mathbf{B}_0 = 0$)	71
5.2	Mouvement d'une particule dans un champ magnétique constant \mathbf{B}_0 ($\mathbf{E}_0 = 0$)	72
5.2.1	Diamagnétisme	74
5.3	Mouvement d'une particule dans un champ magnétique \mathbf{B}_0 et sous l'action d'une force constante F	77
5.3.1	La dérive ($\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}_0$)	79
5.3.2	Application à l'instabilité Rayleigh-Taylor	79
5.4	Mouvement d'une particule dans un champ magnétique lentement variable dans le temps.	83
5.4.1	Invariant adiabatiques	85
5.5	Mouvement d'une particule dans un champ magnétique statique \mathbf{B}_0 et un champ électrique variable $\mathbf{E}(t)$	92
5.5.1	Variation adiabatique (lente)	92
5.5.2	Variation temporelle du champ électrique \mathbf{E} à une fréquence ω proche de Ω_c	94
5.6	Mouvement d'une particule dans un champ magnétique indépendant du temps et lentement variable dans l'espace	98
5.6.1	Mouvement parallèle à \mathbf{B}	100
5.6.2	Mouvement perpendiculaire à \mathbf{B}	103
5.7	Mouvement d'une particule dans un champ magnétique présentant un rayon de courbure R	104
6	Les équations fluides	107
6.1	Introduction	107
7	Ondes dans un plasma dans le modèle à deux fluides	114
7.1	Technique mathématique	116

7.2	Vitesse de phase et de groupe	119
7.2.1	Vitesse de phase	119
7.2.2	Vitesse de groupe	119
8	Etudes de quelques cas simple dans un plasma non-magnétisé, $\mathbf{B}_0 = 0$, modèle à deux fluides.	121
8.1	Ondes électromagnétiques transverses	121
8.2	Ondes longitudinales (ou électrostatiques) à haute fréquence. Ondes de Langmuir ou Ondes de plasma	127
8.2.1	Relation de dispersion	127
8.2.2	Fonction diélectrique	130
8.3	Fonction diélectrique: cas général	131
8.4	Ondes électrostatiques à basse fréquence: Ondes acoustiques ioniques	133
8.4.1	Relation de dispersion	133
8.4.2	Discussion	135
8.4.3	Résumé des relations de dispersion dérivée du modèle à deux fluides pour $\mathbf{B}_0 = 0$, $T \neq 0$ (Figure 55)	136
9	La MagnétoHydroDynamique, MHD	138
9.1	Les équations de la magnétohydrodynamique	138
9.1.1	Conditions de validité des équations de la MHD idéale	141
9.1.2	Propriétés des équations de la MHD	141
9.2	Variation du flux magnétique dans le cadre de la MHD idéale .	142
9.2.1	Plasma gelé par les lignes de champ magnétique	144
9.3	Variation du flux magnétique dans le cadre de la MHD avec conductibilité σ finie (MHD résistive)	146
9.3.1	Diffusion du champ magnétique dans le plasma	147
9.4	Conservation de l'énergie	148
9.5	Quelques propriétés des équations de la MHD	150

9.5.1	Vitesse de dérive $\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}$	150
9.5.2	Calcul de la densité de force de Lorentz	150
9.6	Ondes dans le modèle de la MHD idéale	152
9.6.1	L'onde d'Alfvén de cisaillement (Shear Alfvén Wave)	153
9.6.2	L'onde magnétosonique	156
10	Equilibre et stabilité de plasmas confinés magnétiquement	160
10.1	Introduction	160
10.2	Equilibre statique	160
10.3	Conditions aux limites	161
10.3.1	Conditions aux limites interface vide-coque	163
10.3.2	Conditions aux limites interface plasma-vide	164
10.3.3	Cas où la surface du plasma touche la paroi conductrice	164
11	Quelques équilibres linéaires	166
11.1	Le θ pinch	166
11.2	Le Z pinch	168
11.3	Le screw pinch ou "Tokamak droit"	171
12	Stabilité linéaire d'un équilibre dans le modèle de la MHD idéale	173
12.1	Approche intuitive: analogie mécanique	173
12.1.1	Critères de stabilité linéaire dans le cas 1D	173
12.2	Linéarisation des équations de la MHD idéale	175
12.2.1	Conditions d'équilibre	176
12.2.2	Conditions au bord	177
12.2.3	Equations linéarisées et conditions au bord linéarisées	177
12.2.4	Principe d'énergie dans la MHD idéale	181

Avertissement

Dans ce cours nous utiliserons la convention suivante consacrée par l'usage en physique des plasmas:

Les températures T sont exprimées en électron-Volt [eV]. Rigoureusement c'est la quantité $k_B T$ qui est exprimée en eV ($k_B =$ constante de Boltzmann $= 1.380710^{-23} JK^{-1}$). Par habitude on dit que la température est de tant d'eV. La conversion est $1 \text{ eV} = 11605 \text{ }^\circ\text{K}$. Ainsi un plasma thermonucléaire à une température de "10 keV" possède une température de l'ordre de 100 millions de degrés.

Les densités ioniques et électroniques sont exprimées en nombre de particules par unité de volume [$1/m^3$].

Rappelons également quelques constantes souvent utilisées dans le cours:

$$\begin{aligned} \text{Masse de l'électron } m_e &= 9.1095 \cdot 10^{-31} kg \\ \text{Masse du proton } m_p &= 1.6726 \cdot 10^{-27} kg \\ \text{Rapport } m_p/m_e &= 1836.2 \\ \text{Charge de l'électron } e &= 1.6022 \cdot 10^{-19} C \\ \varepsilon_0 &= 8.854 \cdot 10^{-12} F/m \\ 1 \text{ eV} &= 1.6022 \cdot 10^{-19} J \\ \text{Constante de Planck } h &= 6.6261 \cdot 10^{-34} Js \end{aligned}$$

1 La Physique des Plasmas: Introduction

1.1 Introduction

Plasma vient du Grec et veut dire "ouvrage façonné". Le terme "Plasma" a été introduit en 1928 par le physicien américain I. Langmuir. La physique des plasmas étudie les **gaz ionisés**. Cependant, il est nécessaire de préciser la notion de gaz ionisé lorsque l'on parle de plasma. On entend par plasma un ensemble de particules chargées qui doit satisfaire les conditions suivantes:

- La somme totale des charges est nulle dans un volume macroscopique. C'est la **quasi-neutralité**.
- Les **effets collectifs** des particules doivent être plus importants que les effets dus aux forces coulombiennes entre particules. Nous préciserons cette notion lorsque nous aurons défini la notion d'écrantage de Debye.

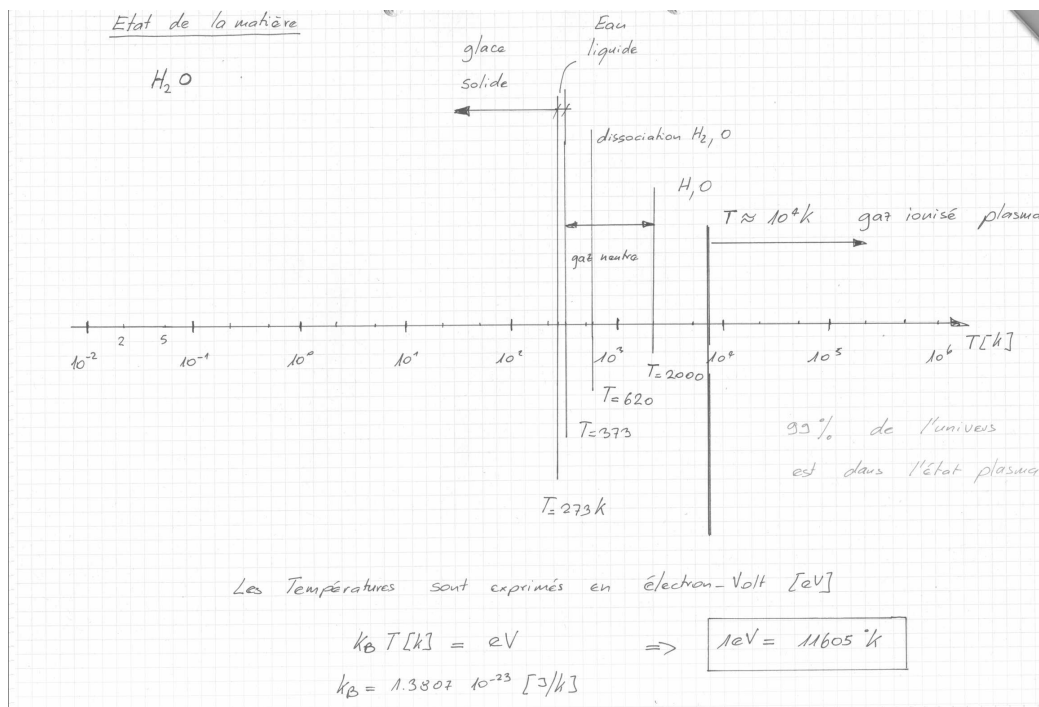


Figure 1: Les états de la matière pour l'eau en fonction de la température: solide, liquide, gaz, plasma.

On dit souvent que le plasma est le quatrième état de la matière. Cette appellation vient du fait qu'au fur et à mesure que la température d'un corps est augmentée, il change d'état. Il passe successivement de l'état solide à l'état liquide puis à l'état gazeux. Si la température atteint environ 10^4 °K à 10^5 °K, la plupart de la matière est ionisée: on a alors l'état de plasma. A une température de l'ordre de 10^5 °K correspond une énergie d'environ 10 eV, ce qui est approximativement les énergies d'ionisation. Bien entendu, les plasmas existent à des températures bien inférieures pour autant que l'on fournisse un processus d'ionisation dont le taux soit supérieur à celui des pertes. Nous allons décrire quelques plasmas de laboratoires dont les températures sont inférieures à 10^5 °K.

Pourquoi étudions-nous la physique des plasmas? La réponse la plus simple est qu'environ **99% de l'univers apparent est formé de plasma**. Cette affirmation peut paraître surprenante alors que sur terre nous rencontrons la plus grande difficulté à avoir du plasma! A côté des phénomènes physiques liés à l'état de plasma, il y a également un moteur fort important à la recherche en physique des plasmas: **la fusion thermonucléaire contrôlée**. Sans rentrer pour le moment dans les détails, la fusion thermonucléaire entre des noyaux légers (comme le deutérium et le tritium) a lieu à des températures de l'ordre de 10^8 °K. A ces températures les gaz sont complètement ionisés et sont à l'état de plasma. Seule alors une connaissance approfondie de ses propriétés nous permettra de confiner et de chauffer le plasma afin d'obtenir des réactions de fusion. A côté de l'étude des propriétés du plasma, signalons que les méthodes tant expérimentales que théoriques utilisées en physique des plasmas sont communes à d'autres branches de la physique.

Quels sont les phénomènes que nous allons étudier en physique des plasmas? Le sujet principal sera l'étude des ondes dans le plasma. Pour la réalisation de la fusion thermonucléaire contrôlée, il est également nécessaire de pouvoir confiner le plasma: c'est le problème de l'**équilibre** entre les forces qui confinent le plasma et la pression thermique. La **stabilité** de l'équilibre revient en fait à l'étude des modes qui peuvent le perturber. Un autre sujet important sera l'étude des **phénomènes de transport** dans un plasma: transport de particules, mais également conductibilité thermique et conductibilité électrique.

Quelles sont les méthodes que nous emploierons? Les plasmas que nous allons étudier seront décrits par des théories classiques (non-quantiques et en général non-relativistes). Dans la plupart des cas nous allons faire la démarche suivante:

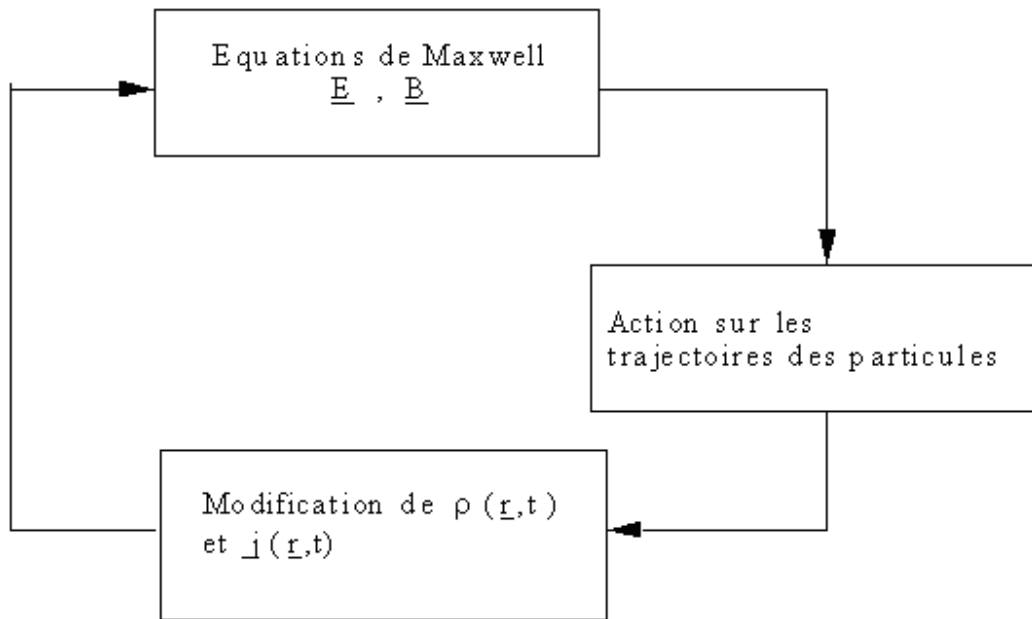


Figure 2: Action des champs électromagnétiques sur un plasma

- Équations de base: équations de Maxwell qui font intervenir les densités de charge ρ et de courant \mathbf{j} . Ces quantités sont les termes de source pour les champs \mathbf{E} et \mathbf{B} et caractéristiques du milieu c.-à-d. du plasma.
- Pour obtenir ρ et \mathbf{j} en fonction de \mathbf{E} et \mathbf{B} , il nous faut une description (ou modèle) du plasma. Cette description pourra être une **description fluide ou cinétique**.

D'une manière symbolique on peut décrire les phénomènes qui se passent dans le plasma de la manière suivante (cf. figure 2):

Les champs électrique et magnétique, qu'ils soient statiques, uniformes ou variables dans le temps et dans l'espace, agissent sur le mouvement des particules et modifient les densités de courant \mathbf{j} et de charge ρ qui entrent en jeu pour la détermination des champs. C'est ce que vous avez vu dans le **cours d'électrodynamique**. Nous retrouverons des notions que vous avez vues lors de votre cours d'électrodynamique comme la notion de **tenseur diélectrique**, ou celle de **relation de dispersion** des ondes électromagnétiques.

La simulation particulaire est une méthode d'étude du plasma qui utilise di-

rectement ce schéma. Les champs \mathbf{E} et \mathbf{B} modifient les trajectoires des ions et des électrons, ce qui modifie les densités de charge ρ et de courant \mathbf{j} , qui à leur tour modifient \mathbf{E} et \mathbf{B} en agissant comme terme de source dans les équations de Maxwell.

1.2 Les caractéristiques du plasma

On décrit un plasma en spécifiant **la densité de ions ou d'électrons**. Nous définirons la densité comme le nombre d'électrons par unité de volume, soit n_e . Si les ions ont une charge $+Ze$, la densité ionique n_i est obtenue par la condition de neutralité de charge:

$$n_e e = n_i Z e \quad (1)$$

$$n_i = n_e / Z \quad (2)$$

Si Z vaut 1 (ions d'hydrogène ou de ses isotopes: deuterium, tritium) nous avons alors:

$$n_i = n_e \quad (3)$$

Une autre quantité importante est la **température \mathbf{T}** . Là il nous faudra distinguer la température électronique T_e de la température ionique T_i bien que les deux gaz d'électrons et d'ions soient mélangés. Il est évident qu'à l'équilibre ces deux quantités sont égales. Cependant, lorsqu'on calcule les temps d'équipartition de l'énergie, on constate les échelles de temps suivantes:

1. les électrons se thermalisent entre eux
2. les ions se thermalisent entre eux
3. finalement les deux gaz se thermalisent l'un l'autre

Dans beaucoup de cas, le temps de confinement (c.-à-d. où le plasma non entretenu existe) est trop court pour que le troisième processus ait lieu, d'où l'existence d'une température ionique et d'une température électronique différentes.

Signalons qu'il y a également lieu dans certains cas de tenir compte d'une

anisotropie de température. En effet, dans beaucoup de cas, le plasma est immergé dans un **champ magnétique**: les propriétés de transport de l'énergie diffèrent dans la direction du champ et dans celle perpendiculaire au champ.

Les plasmas de laboratoire ont pour paramètres:

- Densité: $n_e = 10^{14} - 10^{17}$ particules/m³
- Température: 0.1 eV à une dizaine d'eV (1 eV \approx 11'000 °K)

Les plasmas d'intérêt pour la fusion thermonucléaire ont une densité de l'ordre de $10^{19} - 10^{20}$ particules/m³. Les températures sont de 1 keV à 10 keV.

La table 1 donne les densités et températures typiques de quelques plasmas.

Type de plasma	Densité [m ⁻³]	Température [eV]
Plasma interstellaire	$10^5 - 10^7$	$10^{-2} - 10$
Plasma ionosphérique	$10^{10} - 10^{12}$	$10^{-2} - 1$
Décharge gazeuse	$10^{12} - 10^{19}$	quelques eV
Plasmas industriels	$10^{16} - 10^{19}$	1-100
Plasmas de fusion	$10^{19} - 10^{21}$	$\sim 10^4$

Table 1: Caractéristiques de quelques plasmas

1.3 Le plasma solaire

Le soleil est une boule de plasma dont les réactions de fusion nucléaire nous fournissent l'énergie. Les données du soleil sont résumées dans la table 2 et sa structure est présentée sur la figure 3.

Le coeur est la région centrale très chaude du soleil (température d'environ $1.5 \cdot 10^7$ °K) où se produisent les réactions de fusion qui engendrent la puissance

Masse du soleil M_0	$1.99 \cdot 10^{30}$ kg
Rayon du soleil R_0	$6.96 \cdot 10^8$ m
Puissance rayonnée	$3.9 \cdot 10^{26}$ W

Table 2: Quelques données du soleil

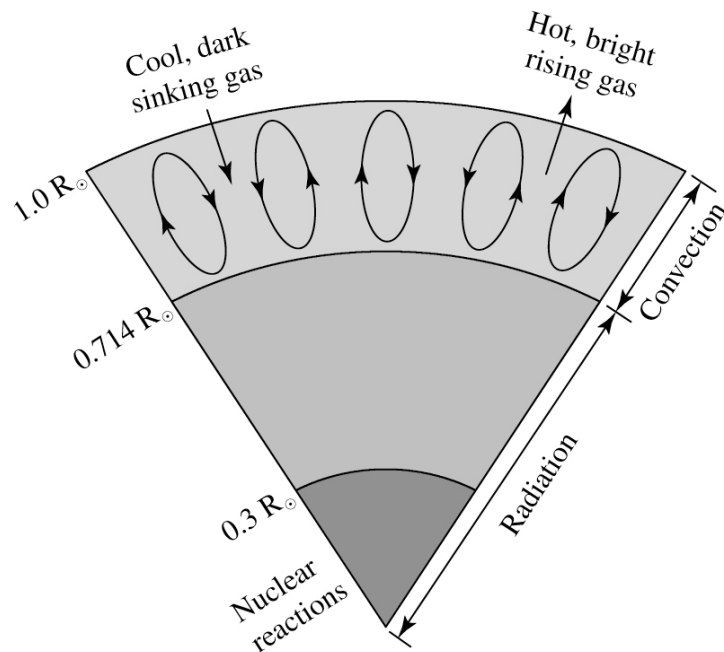
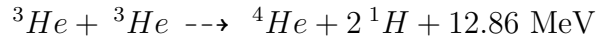
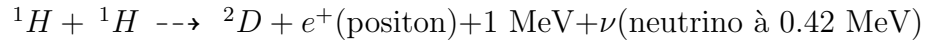


Figure 3: Structure du soleil (Tiré de "B. W. Carrol, D.A. Ostlie, An Introduction to modern Astrophysics, 2nd edition, Pearson International Edition, 2007")

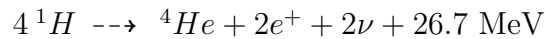
rayonnée. Son rayon est $1/4$ de rayon solaire R_0 mais sa masse atteint la moitié de la masse totale M_0 . Dans le coeur les réactions de fusion ont lieu:

- entre des noyaux d'hydrogène pour former un noyau de deutérium
- entre un noyau de deutérium et un noyau d'hydrogène pour former un noyau de He^3
- entre deux noyaux de He^3 pour donner un noyau de He^4 et deux protons.

Nous avons donc les réactions de fusion suivantes:



Soit au total:



En résumé, avec 4 noyaux d'hydrogène, un noyau d' He^4 est formé. **Le défaut de masse entre les quatre protons et le noyau d' He^4 est converti en énergie.** Cette énergie dans le coeur du soleil est sous forme de rayons γ . Notez que la première réaction (celle qui donne naissance au noyau de deutérium) donne naissance à un neutrino ν . Des expériences d'observation des neutrinos sur la terre ont montré une anomalie sur le nombre de neutrinos détectés, ce qui donne lieu à des questions de physique très intéressantes sur le neutrino.

Activité solaire Octobre 2003

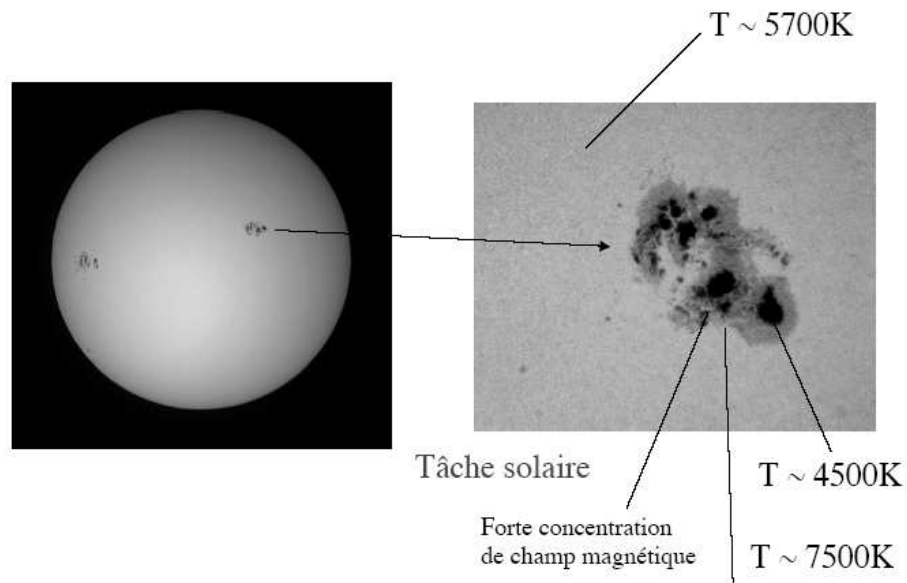


Figure 4: Taches solaires à la surface du soleil.

Dans la zone radiative, l'énergie est transportée par diffusion: les rayons γ sont absorbés puis ré-émis à des longueurs d'onde plus élevées. Notez que nous recevons l'énergie solaire dans le spectre visible (énergie de l'ordre de 0.5 eV correspondant à la température de la surface de 5700 K comme montré dans la Figure 4), alors que les rayons γ dus aux réactions de fusion ont une énergie de plusieurs MeV. Le photon γ créé au centre de soleil, mets approximativement 1 Millions d'années pour quitter sa surface sous forme d'un photon visible (processus d'absorption réémission).

Dans la zone de convection, le gaz solaire est agité de mouvement de convection. Finalement au-delà d'une fois le rayon solaire R_0 , nous arrivons dans l'atmosphère solaire.

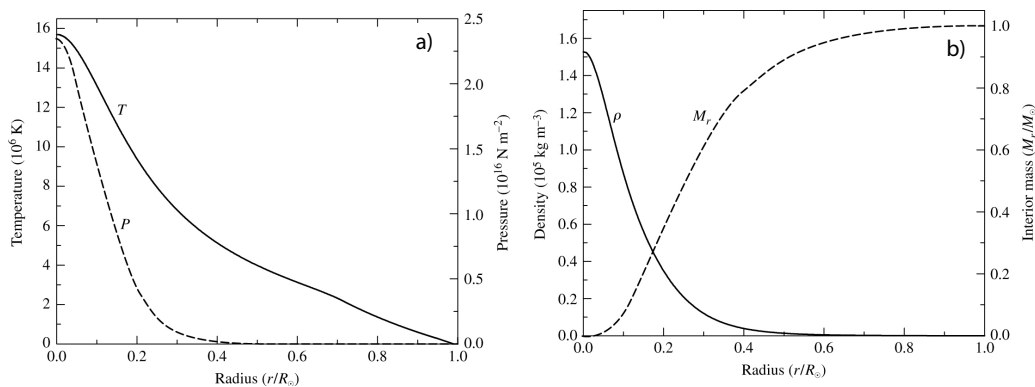


Figure 5: Variation des paramètres à l'intérieur du soleil (Tiré de "B. W. Carrol, D.A. Ostle, An Introduction to modern Astrophysics, 2nd edition, Pearson International Edition, 2007").

La surface du soleil est relativement froide (5700 °K) et est relativement peu épaisse. Cette couche est appelée photosphère. La photosphère est parsemée de tâches sombres froides (4500 °K) entourées de zones bouillantes et chaudes (7000 °K) avec une forte concentration de champs magnétiques (cf figure 4). Ces taches solaires ont un cycle de 11 ans environ.

Les zones au-dessus de la photosphère sont:

- la chromosphère

- une zone de transition
- la couronne solaire.

La densité et la température dans ces zones sont indiquées sur la figure 6.

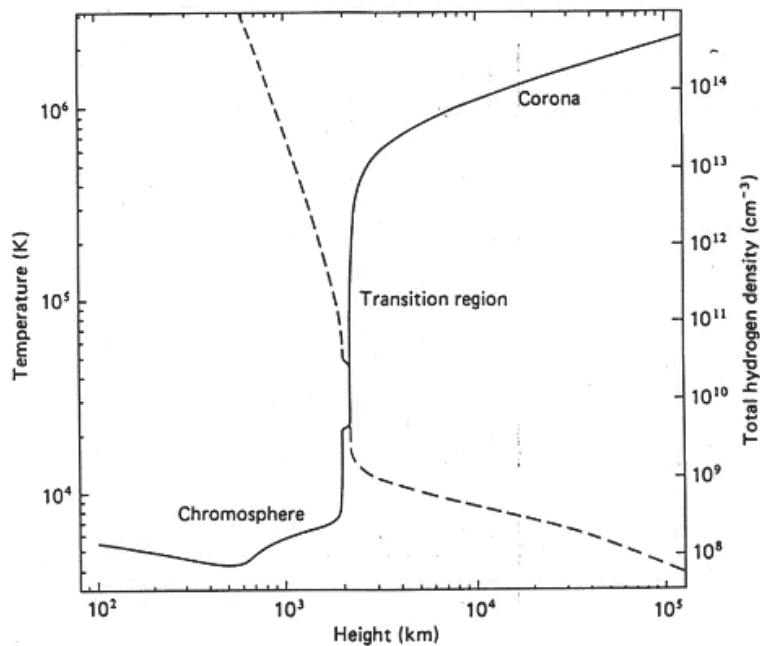


Figure 5.6. Temperature (solid line) and density (dashed line) versus height in the solar atmosphere. The height $h = 0$ occurs at the level of unit optical depth for visible radiation. (From Withbroe and Noyes, 1977. Reproduced, with permission, from the *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, vol. 15, © 1977, by Annual Reviews Inc.) Also see Noyes and Avrett (1987).

Figure 6: Paramètres de la chromosphère et de la couronne solaire en fonction de l'altitude

Le soleil "brûle" 564 millions de tonnes d'hydrogène par seconde et les convertit en 560 millions de tonnes d'hélium. C'est l'énergie équivalente (selon la relation $E=mc^2$) des 4 millions de tonnes manquantes qui nous fournit l'énergie rayonnée par le soleil.

Il est intéressant de noter que la température de la couronne est de l'ordre du million de degrés alors que celle de la photosphère est inférieure à 10^4 °K. La couronne est le siège de nombreuses activités, générant par exemple le vent solaire qui n'est autre qu'un plasma éjecté du soleil. La densité du

vent solaire est entre 10^6 et 10^8 m^{-3} avec une température entre 1 et 100 eV. Le champ magnétique terrestre agit comme écran et nous protège du vent solaire.

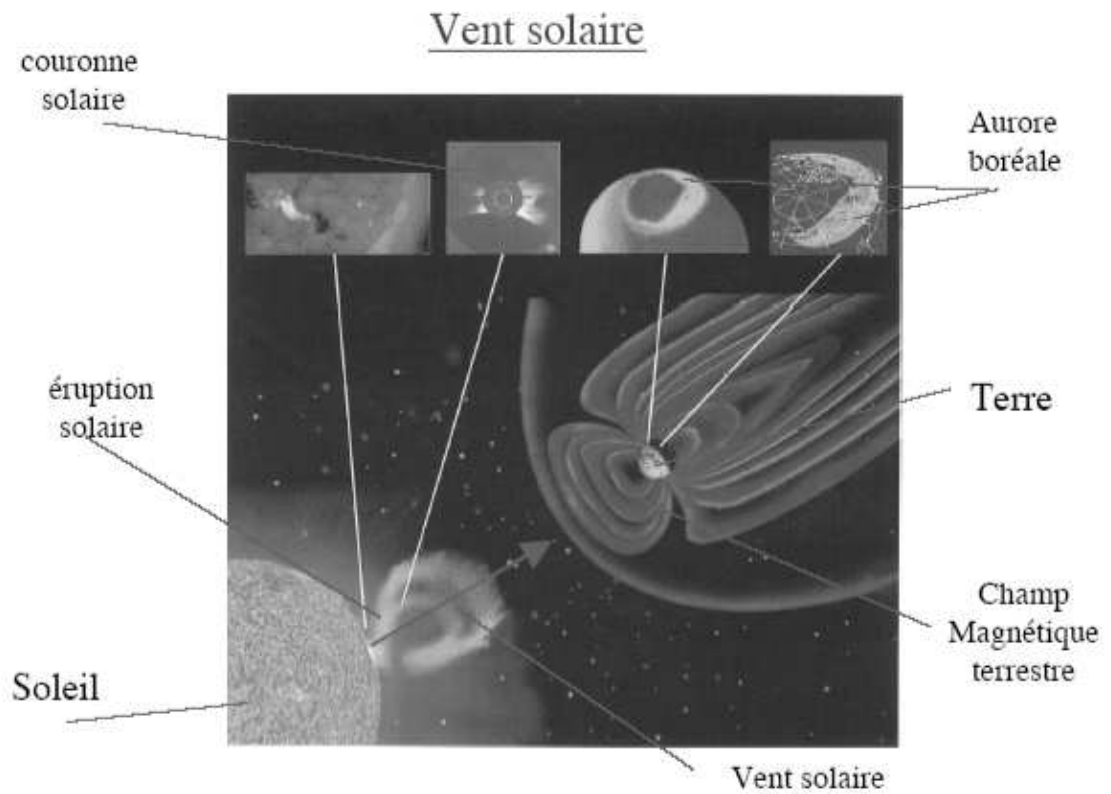


Figure 7: Vent solaire

1.4 Quelques sources de plasma de laboratoire

Nous allons décrire ici quelques machines qui sont couramment utilisées lors des expériences de physique fondamentale des plasmas. On distingue les **plasmas non-magnétisés** et les **plasmas magnétisés** selon qu'il y ait ou non un champ magnétique statique \mathbf{B}_0 .

Les plasmas non magnétisés sont créés par différentes méthodes. La première utilise des électrons énergétiques émis par des filaments de tungstène. L'énergie de ces électrons primaires est supérieure à l'énergie d'ionisation du gaz utilisé (cf. table 3), qui est souvent un gaz noble comme l'Argon. Les gaz nobles sont souvent utilisés car ils sont monoatomiques et lors de l'ionisation donnent une population d'ions ayant un seul rapport (charge /masse) pour autant qu'il n'y ait que des ions une seule fois ionisés.

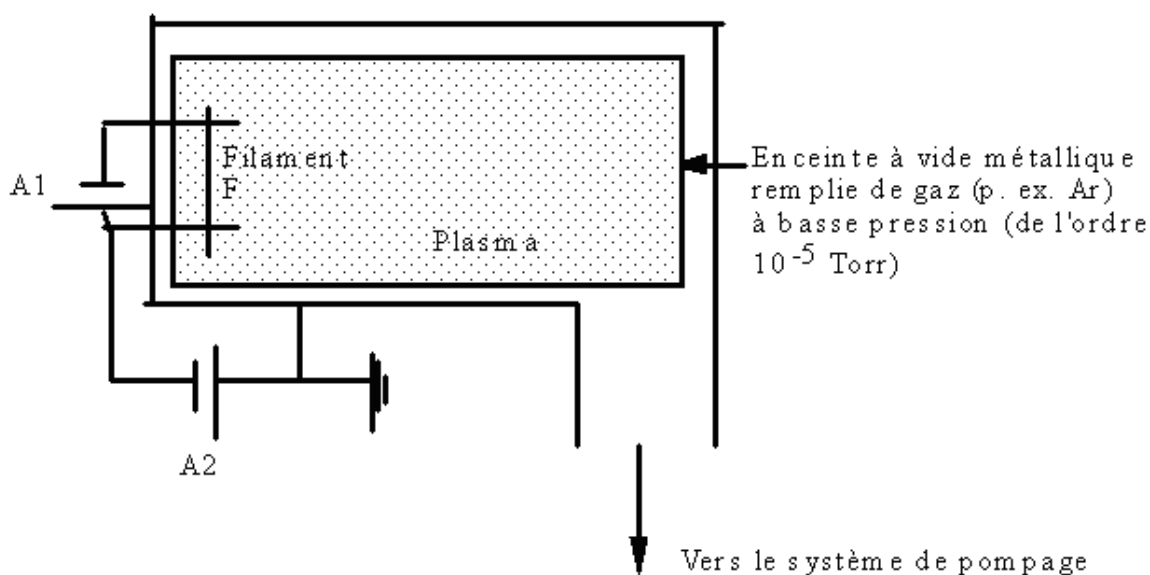


Figure 8: Schéma d'une installation permettant de créer un plasma non-magnétisé

Le schéma d'une telle expérience est présenté sur la figure 8.

1.4.1 Section efficace

Dans les processus collisionnels, la physique de la collision entre deux particules amène au concept de **section efficace**. Cette quantité représente la

probabilité qu'un processus collisionnel spécifique aie lieu (ionisation, pertes d'énergie, pertes de quantité de mouvement, etc.) et peut être illustré de la manière suivante. En se référant à la figure 9 soit un flux de particules incidentes, Γ (électrons, protons, photons, etc.), sur une cible de surface A , infiniment mince d'épaisseur dx et constituée de particules cible, immobiles, de densité n_c . La section efficace est une surface σ qui est associée à chaque particule cible et qui permet de définir la probabilité d'interaction donnée par:

$$P = \frac{\Sigma}{A} = \frac{(n_c A dx) \sigma}{A} = n_c \sigma dx \quad (4)$$

où $\Sigma = (n_c A dx) \sigma = N_c \sigma$ représente la surface totale d'interaction pour les N_c particules cible.

En utilisant (4), avec un flux incident de particules incidentes $\Gamma(x)$, le flux sortant de la cible d'épaisseur dx sera:

$$\Gamma(x + dx) = \Gamma(x)(1 - P) = \Gamma(x)(1 - n_c \sigma dx) \quad (5)$$

avec la relation $\Gamma(x + dx) = \Gamma(x) + d\Gamma$, il vient:

$$d\Gamma = -\Gamma n_c \sigma dx \quad (6)$$

où

$$\Gamma(x) = \Gamma_0 e^{-x/\lambda_m}. \quad (7)$$

La quantité $\lambda_m = 1/(n_c \sigma)$ est appelée le **libre parcours moyen** qui donne la distance caractéristique entre deux collisions successives.

Le temps caractéristique entre collisions, pour une vitesse de la particule incidente, v , est: $\tau = \lambda_m/v$. En moyennant sur une distribution maxwellienne des particules incidentes on obtient la quantité qui est normalement définie comme la **fréquence de collision** et qui vaut:

$$\nu = n_c \langle \sigma v \rangle, \quad (8)$$

avec $\langle \dots \rangle$ étant la moyenne sur la distribution Maxwellienne.

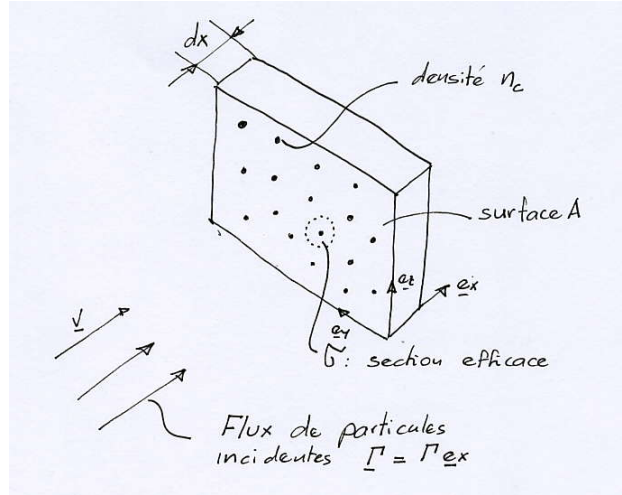


Figure 9: Illustration de la définition de section efficace d'interaction.

Ion	E_{ioni} [eV]	E_{imax} [eV]	$\sigma_{ioni}(E_{imax})$ [10^{-16} cm 2]
H $^+$	13.54	56	0.7
He $^+$	24.46	126	0.37
He $^{++}$	78	500	0.0012
Ne $^+$	21.5	150	0.78
Ne $^{++}$	62.6	250	0.045
A $^+$	15.76	90	3.21
A $^{++}$	43.4	120	0.31
Kr $^+$	14	80	5
Kr $^{++}$	38.6	100	0.5
Xe $^+$	12.13	115	4.8
Xe $^{++}$	33.3	100	0.75

Table 3: Énergie d'ionisation E_{ioni} , énergie E_{imax} pour laquelle la section efficace d'ionisation est maximale et valeur $\sigma_{ionis}(E_{imax})$ de la section efficace maximale pour quelques états d'ionisation des gaz.

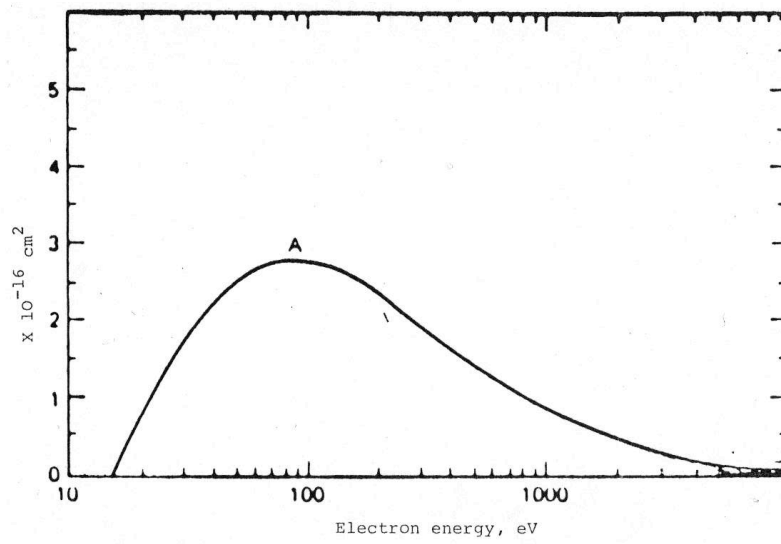


Figure 10: Section efficace d'ionisation pour l'Argon par des électrons

On fait le vide dans l'enceinte (pression de base inférieure à 10^{-6} Torr) puis on introduit le gaz à une pression typique de 10^{-5} - 10^{-4} Torr. Les filaments de tungstène sont chauffés grâce à l'alimentation A1 par effet Joule jusqu'à une température d'environ 2500 °C où ils émettent des électrons. Ils sont polarisés à environ 100 V par rapport à l'enceinte en utilisant l'alimentation A2. A cette énergie, la section efficace de ionisation est maximale (cf. figure 10). Les plasmas obtenus ont une densité de l'ordre de 10^8 - 10^{10} cm^{-3} . La température électronique T_e est de quelques eV et la température ionique T_i d'environ 0.1 - 0.2 eV.

Une autre technique souvent employée pour des applications industrielles est l'utilisation de radiofréquence (R.F.). La puissance R.F. (de l'ordre d'une dizaine à une centaine de Watt à une fréquence de quelques dizaines de MHz) est appliquée entre deux électrodes (cf. figure 11). Elle permet d'accélérer les électrons jusqu'à une énergie suffisante pour ioniser le gaz. La densité et la température de ces plasmas sont typiquement de 10^9 - 10^{11} cm^{-3} . La température électronique est de quelques eV mais la fonction de distribution électronique n'est pas une maxwellienne. Les ions sont froids et proches de la température du gaz neutre. On peut également créer des plasmas avec des micro-ondes.

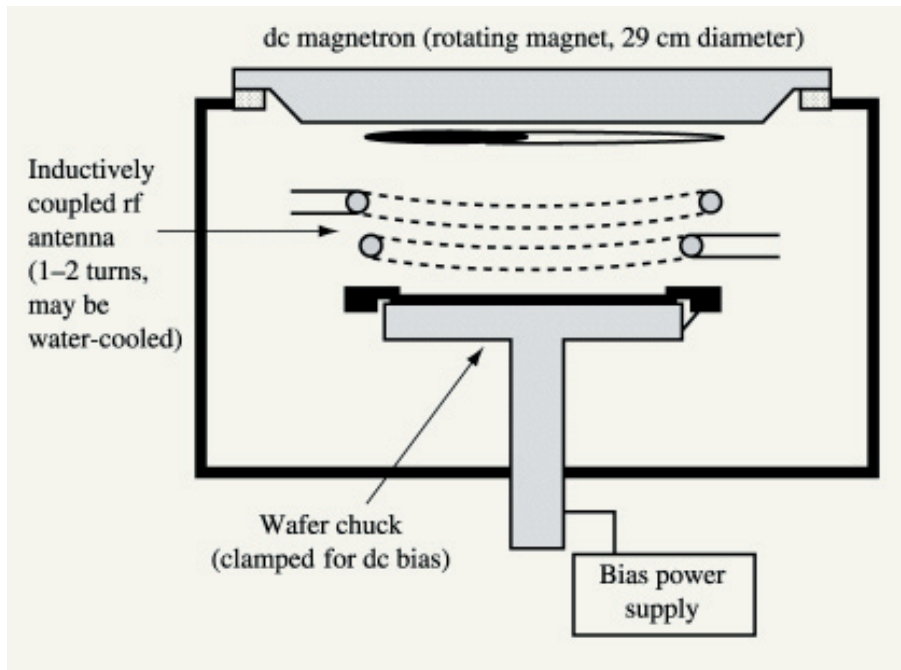


Figure 11: Schéma d'une machine à plasma utilisant une décharge R.F.

Les plasmas magnétisés jouent un rôle très important pour l'étude de la physique des plasmas. En effet, l'introduction d'un champ magnétique statique enrichit considérablement la physique des phénomènes qui peuvent être générés dans le plasma. La configuration la plus simple est celle d'une colonne de plasma cylindrique immergée dans un champ magnétique statique homogène \mathbf{B}_0 . Le champ \mathbf{B}_0 est créé par des bobines. Le plasma peut être créé par ionisation d'un gaz noble. Les électrons ionisants sont émis par une cathode recouverte d'oxyde de Baryum (température d'émission $1000\text{ }^\circ\text{C}$) ou d'hexaborure de Lanthane LaB_6 (température d'émission $1500\text{ }^\circ\text{C}$). Le schéma d'une telle machine est présenté sur la figure 13.

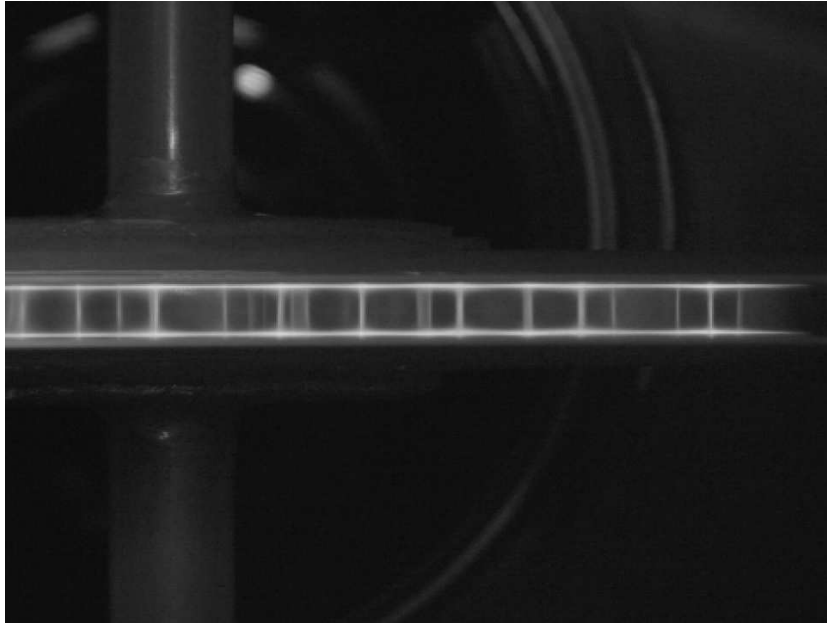


Figure 12: "Décharge capacitive"

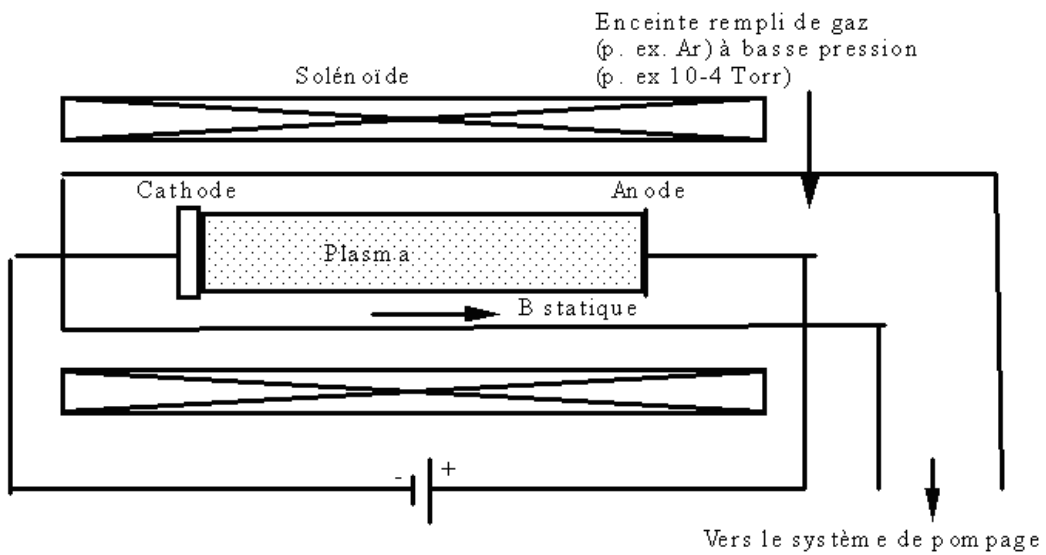


Figure 13: Schéma d'une machine créant un plasma magnétisé par décharge

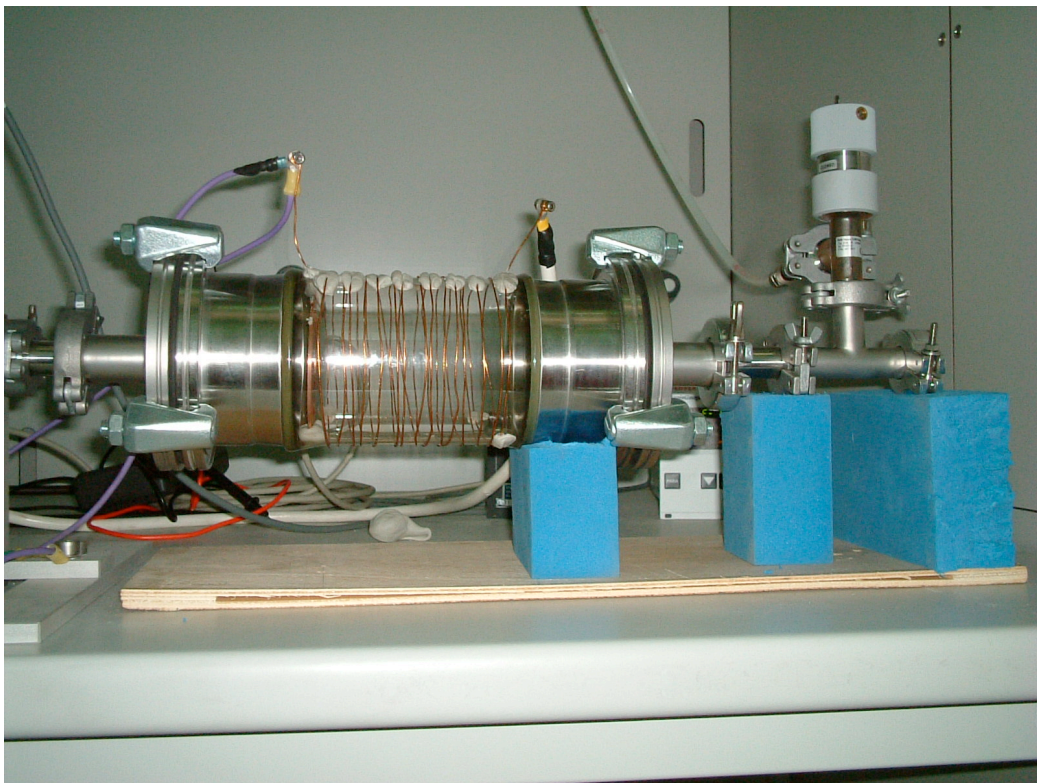


Figure 14: Installation permettant de créer un plasma magnétisé

Les densités sont similaires à celles obtenues dans les machines analogues sans champ magnétique, c.à-d. d'environ 10^9 à 10^{10} cm^{-3} . La température électronique T_e est de quelques eV et la température ionique T_i de quelques dixièmes d'eV.

Un autre type de machine produisant un plasma magnétisé est la machine Q (Q pour "quiescent", c.-à-d. calme; le plasma produit n'a pas de fluctuation et est donc "calme", d'où le nom de machine Q). Le processus d'orientation des ions est basé sur le phénomène de ionisation par contact. Certains alcalins (Caesium, Potassium, Baryum) peuvent être ionisés au contact d'un métal comme le tungstène. La base physique du phénomène est liée au fait que le potentiel d'ionisation E_{ioni} (3.87 eV pour le Cs, 4.32 eV pour le K et 5.19 eV pour le Ba) de ces alcalins est comparable au potentiel de sortie $\Phi_{extr.}$ du métal (4.52 eV pour le tungstène). Des ions sont ainsi produits par ce phénomène. La probabilité d'ionisation sur une plaque de W à $T = 2500$ °K (appelée plaque chaude) est de 0.91 pour le Cs, 0.56 pour le K, 0.083 pour le Ba. Ces probabilités sont calculées à partir de l'équation de Langmuir-Saha. Pour produire les électrons, il suffit de chauffer la plaque de W jusqu'à une température qui donne lieu à une émission d'électrons. Le schéma de la machine Q est présenté sur la figure 15.

Le plasma obtenu a une densité de l'ordre de $10^9 - 10^{10}$ cm^{-3} . La principale caractéristique est l'égalité des températures électronique et ionique $T_e = T_i \cong 0.2$ eV qui est la température T de la plaque chaude de W. De plus on peut obtenir un plasma complètement ionisé en soignant le vide de base et la technologie de l'injecteur de vapeur de métal alcalin pour éviter d'avoir des atomes neutres dans la région où se trouve le plasma.

Nous discuterons dans le chapitre sur la fusion thermonucléaire des plasmas d'intérêt pour la fusion. Les paramètres typiques de différents plasmas en termes de densité et température sont illustré dans la Figure 17.

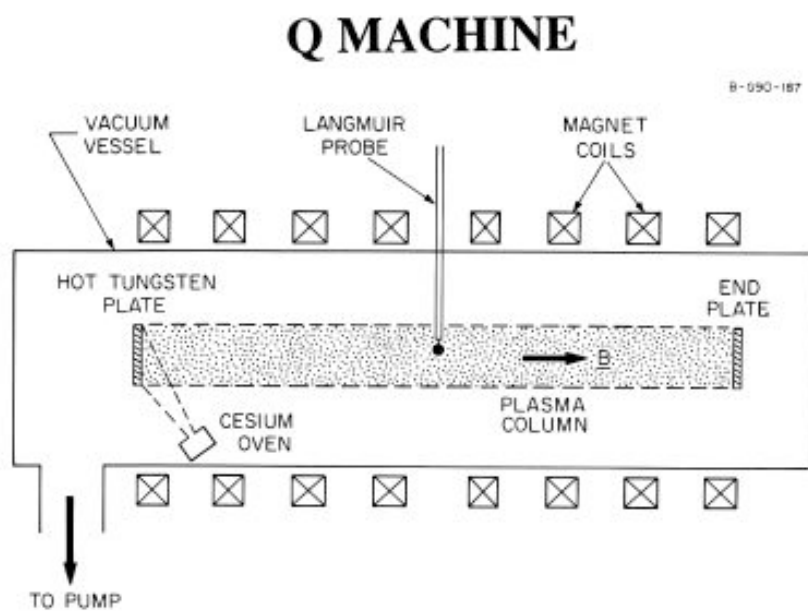


Figure 15: Schéma d'une machine Q produisant un plasma de Ba. En remplaçant le Ba par du Cs, du K on obtient un plasma de Cs ou de K.

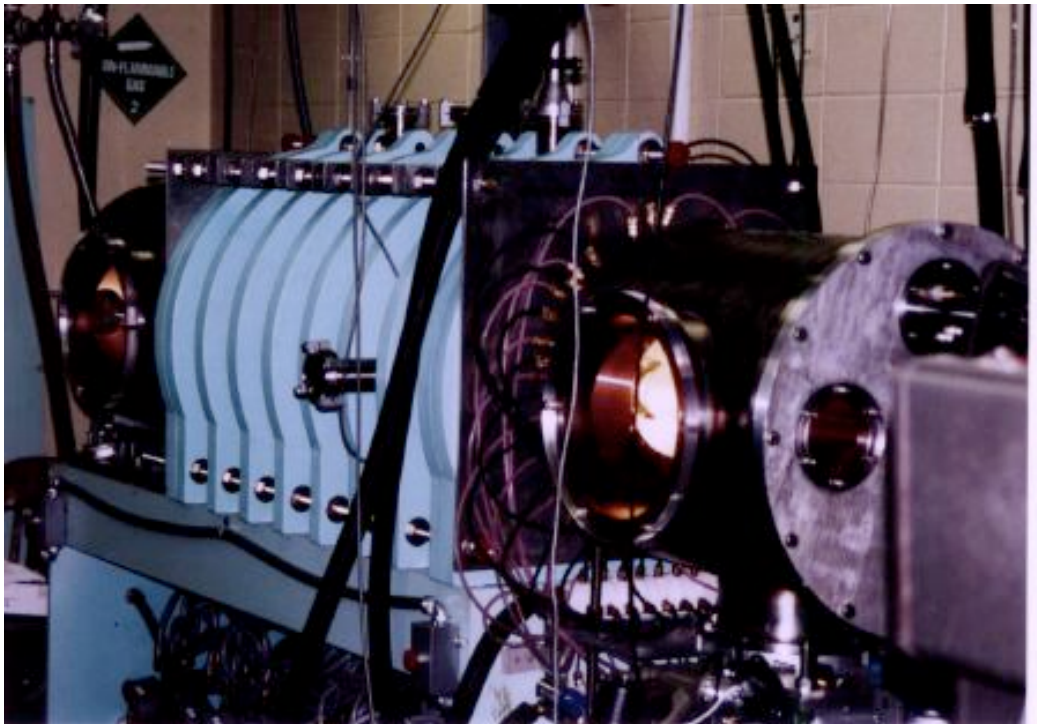


Figure 16: Machine Q

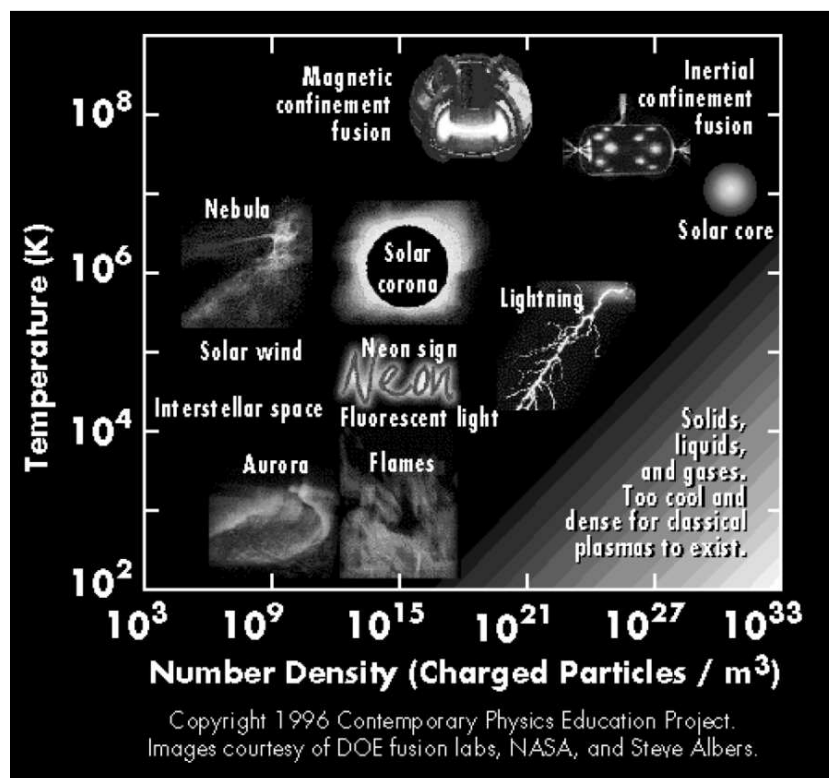


Figure 17: Caractéristiques typiques de plasma

2 Écrantage de Debye

Nous nous proposons d'étudier les phénomènes électrostatiques à l'intérieur d'un plasma supposé à l'équilibre thermodynamique. Rappelons que le plasma est formé de charges positives et négatives. Une charge positive, par exemple, va attirer des charges négatives et repousser les charges positives. Il s'en suit alors que la charge positive va être "écrantée" par les charges négatives. C'est l'écrantage de Debye. Un phénomène similaire a lieu dans les électrolytes.

2.1 Potentiel électrique autour d'une charge dans un plasma

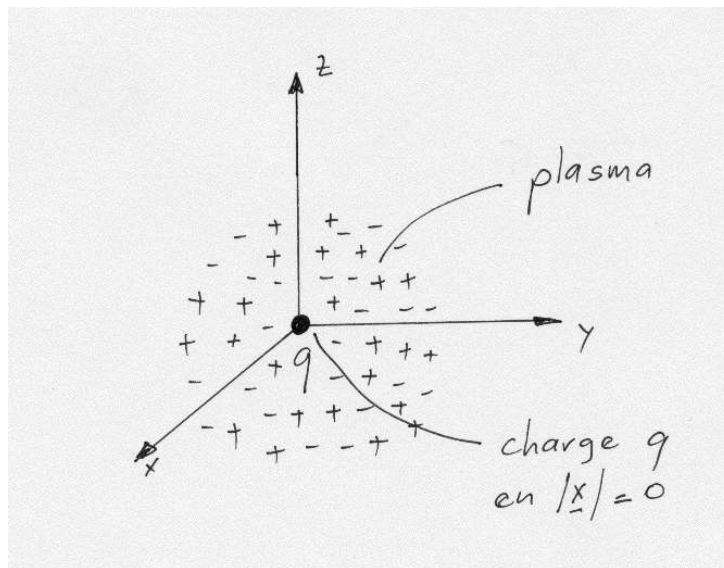


Figure 18: Particule test (ion de charge q) dans le plasma

Soit une charge q placée en $\mathbf{x} = 0$ dans un plasma avec des ions une fois chargés (cf. figure 18). Le potentiel électrique $V(\mathbf{x})$ autour de la charge est donné par l'équation de Poisson:

$$-\nabla^2 V(\mathbf{x}) = \frac{\rho(\mathbf{x})}{\epsilon_0} + \frac{q \delta(\mathbf{x})}{\epsilon_0} \quad (9)$$

$$\rho(\mathbf{x}) = e[n_i(\mathbf{x}) - n_e(\mathbf{x})] \quad (10)$$

où $\rho(\mathbf{x})$ est la densité totale de la charge, $n_e(\mathbf{x})$ et $n_i(\mathbf{x})$ les densités électronique et ionique. Il nous est nécessaire d'avoir une relation entre $\rho(\mathbf{x})$ et $V(\mathbf{x})$. On suppose pour cela que l'on a une situation d'équilibre. La densité d'ions et d'électrons est alors donnée par la distribution de Boltzmann, en admettant que les températures électronique T_e et ionique T_i sont différentes:

$$n_i(\mathbf{x}) = n_0 \exp \left\{ -\frac{eV(\mathbf{x})}{k_B T_i} \right\} \quad (11)$$

$$n_e(\mathbf{x}) = n_0 \exp \left\{ +\frac{eV(\mathbf{x})}{k_B T_e} \right\} \quad (12)$$

Nous avons utilisé le fait qu'à l'équilibre le plasma est neutre :

$$n_i(V=0) = n_e(V=0) = n_0 \quad (13)$$

En insérant les expressions (11) et (12) dans l'équation de Poisson, on obtient:

$$-\nabla^2 V(\mathbf{x}) = \frac{en_0}{\varepsilon_0} \left[\exp \left\{ \frac{-eV(\mathbf{x})}{k_B T_i} \right\} - \exp \left\{ \frac{eV(\mathbf{x})}{k_B T_e} \right\} \right] + \frac{q\delta(\mathbf{x})}{\varepsilon_0} \quad (14)$$

Le problème considéré a une symétrie sphérique: il est alors naturel d'employer les coordonnées sphériques avec lesquelles le laplacien s'écrit:

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} \quad (15)$$

En supposant le milieu isotrope, V ne dépend pas des angles θ et ϕ , mais uniquement de la coordonnée radiale r :

$$-\nabla^2 V = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right] \quad (16)$$

Nous avons donc à résoudre¹:

¹En coordonnées sphériques:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^\infty \delta(\mathbf{x}) r^2 dr \sin \theta d\theta d\phi = 1$$

$$-\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right] = \frac{e n_0}{\varepsilon_0} \underbrace{\left[\exp \left\{ \frac{-eV(r)}{k_B T_i} \right\} - \exp \left\{ \frac{eV(r)}{k_B T_e} \right\} \right]}_{\rho(r,V)/\varepsilon_0} + \frac{q \delta(\mathbf{x})}{\varepsilon_0} \quad (17)$$

L'équation (17) est une équation **non-linéaire** puisque ρ dépend de V non-linéairement. Pour trouver une solution analytique, nous allons supposer que

$$\frac{eV}{k_B T_i} \ll 1 \quad \text{et} \quad \frac{eV}{k_B T_e} \ll 1 \quad (18)$$

ce qui nous permet de **linéariser** (17) en développant les exponentielles en série de Taylor.

$$-\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right] = \frac{e n_0}{\varepsilon_0} \left[1 - \frac{eV}{k_B T_i} - 1 - \frac{eV}{k_B T_e} \right] + \frac{q \delta(\mathbf{x})}{\varepsilon_0}$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right] = \frac{e n_0}{\varepsilon_0} \left[\frac{eV}{k_B T_i} + \frac{eV}{k_B T_e} \right] - \frac{q \delta(\mathbf{x})}{\varepsilon_0} \quad (19)$$

Nous avons maintenant à résoudre une équation linéaire du type

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right] = \frac{V(r)}{a^2} - \frac{q \delta(\mathbf{x})}{\varepsilon_0} \quad (20)$$

avec

$$\frac{1}{a^2} = \frac{e^2 n_0}{\varepsilon_0 k_B} \left[\frac{1}{T_i} + \frac{1}{T_e} \right]$$

La grandeur a a bien une dimension de longueur. La densité de charge $q \delta(\mathbf{x})$ est un terme de source.

L'équation (20) peut être résolue par une méthode standard, en calculant d'abord la solution de l'équation homogène et en tenant compte du terme de source comme condition de la solution particulière.

L'équation homogène est:

$$\frac{1}{r^2} \partial_r \left[r^2 \partial_r V(r) \right] - \frac{V}{a^2} = 0 \quad (21)$$

Avec le changement de variable:

$$V(r) = \frac{U(r)}{r}, \quad (22)$$

et en remplaçant dans l'équation (21), on obtient pour $U(r)$:

$$\frac{d^2U}{dr^2} - \frac{U}{a^2} = 0 .$$

qui a comme solution:

$$U(r) = A \exp \left[-\frac{r}{a} \right] + B \exp \left[\frac{r}{a} \right]$$

Pour $r \rightarrow \infty$, $U(r)$ doit rester fini ce qui implique que $B = 0$.

Pour $r \rightarrow 0$, $V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$ qui est le potentiel coulombien d'une charge isolée.

Cette dernière condition implique que $A = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}$.

Ainsi:

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \exp \left[-\frac{r}{\lambda_D / (1 + \frac{T_e}{T_i})^{1/2}} \right] \quad (23)$$

La quantité

$$\lambda_D = \sqrt{\frac{\epsilon_0 k_B T_e}{n_0 e^2}} \quad (24)$$

est la **longueur de Debye**².

²La solution de (20) donnant lieu à (23) a été effectuée de manière directe. Une autre méthode qui s'avère très instructive pour la suite du cours est basée sur une transformation intégrale de (20) qui fait appel à une transformée de Fourier.

Par définition de la transformée de Fourier 3-dimensionnelle du potentiel $V(\mathbf{x})$ on a:

$$\tilde{V}(\mathbf{k}) = \int d^3x V(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \quad (25)$$

avec la transformée de Fourier inverse donnée par:

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k \tilde{V}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \quad (26)$$

En utilisant l'expression (26) dans le terme $\nabla^2 V(\mathbf{x})$ de (20) on remarque que l'opérateur ∇^2 agit uniquement sur le terme $e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$ et donne lieu au terme $-k^2 e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$. L'opérateur ∇ dans l'espace direct équivaut donc à une multiplication par $i\mathbf{k}$ dans l'espace de Fourier. On transforme donc une équation différentielle dans l'espace direct en une équation algébrique dans l'espace de Fourier.

Compte tenu de cette propriété et du fait que $\delta(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$, à partir de (20) la transformée de Fourier de $V(\mathbf{x})$ s'écrit comme:

$$\tilde{V}(\mathbf{k}) = \frac{qT}{\epsilon_0(k^2 + a^{-2})} \quad (27)$$

Nous retrouvons le fait qu'en $r = 0$ le potentiel V diverge en $1/r$, potentiel coulombien de la charge q en $r = 0$.

On peut réécrire l'expression du potentiel $V(r)$:

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\lambda_D} \frac{\lambda_D}{r} \exp\left\{-\frac{r}{\lambda_D/(1 + \frac{T_e}{T_i})^{1/2}}\right\} \quad (28)$$

La variation de $\exp(-\tilde{r}/\sqrt{2})/\tilde{r}$, avec $\tilde{r} = r/\lambda_D$, est donnée sur la figure 19.

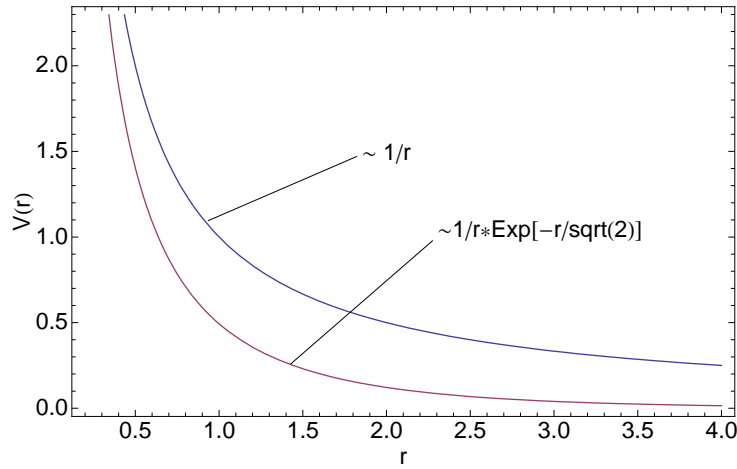


Figure 19: Variation de $\exp(-r/\sqrt{2})/r$ comparée à celle de $1/r$

On remarque qu' à partir d'une distance radiale correspondante à quelques fois la longueur de Debye λ_D , le potentiel devient négligeable: on dit qu'il est "écrané, blindé". Au delà de cette zone, le potentiel électrique est nul: le plasma reste neutre.

Dans la zone de quelques distances de Debye, nous avons un potentiel électrique non-nul puisqu'il n'y a plus égalité des charges électriques positives et négatives puisque le potentiel V est non-nul. **A l'intérieur d'une sphère de rayon égal à la longueur de Debye on n'a plus de quasi-neutralité.**

A partir des équations (11) et (12) on peut calculer les densités de charge

A partir de cette équation, la transformée de Fourier inverse (26) permet de calculer le potentiel $V(\mathbf{x})$ et de retrouver la solution (23).

respectives des électrons et des ions à l'intérieur de la sphère de Debye:

$$\begin{aligned} n_e(r) &= n_0 \left[1 + \frac{e V(r)}{k_B T_e} \right] \\ n_i(r) &= n_0 \left[1 - \frac{e V(r)}{k_B T_i} \right] \end{aligned}$$

Ainsi, avec une charge $q > 0$, $V(r) > 0$ ce qui implique $n_e(r) > n_i(r)$ pour $r < \lambda_D$.

La valeur numérique de la longueur de Debye peut être facilement calculée en utilisant la formule suivante:

$$\lambda_D [m] = 7.434 \cdot 10^3 \sqrt{T[eV]} n^{-1/2} [m^{-3}]$$

où la température T est exprimée en eV et la densité en m^{-3} .

Pour un plasma ayant une température électronique T_e de 1 eV et une densité de $10^{16} m^{-3}$, λ_D vaut $7.4 \cdot 10^{-5} m$.

Cette démonstration nous a montré que le potentiel d'une charge extérieure dans un plasma donne lieu à un potentiel dont la dépendance tend vers 0 plus rapidement que le potentiel coulombien $1/r$. Du point de vue pratique si nous introduisons dans un plasma un objet chargé (c'est à dire une collection de charges électriques) le plasma s'arrange pour "blinder" le champ électrique dû à cet objet (c.f. exercices): à quelques longueurs de Debye, on ne sentira plus le champ électrique dû à l'objet.

Nous avons considéré dans la démonstration que l'on a introduit une charge extérieure. Que se passe-t-il **dans le plasma** lorsque aucune charge électrique n'est introduite? **Chaque particule chargée du plasma agit comme centre d'une sphère de Debye** (elle attire les particules de charge opposée et repousse celles de charge de même signe) et fait partie des sphères de Debye des autres particules chargées du plasma ³.

³Cette dernière propriété signifie que dans un plasma, uniquement les particules (ions et électrons) qui se trouvent à l'intérieur d'une sphère de rayon inférieur à la longueur de Debye subissent des interactions (collisions) coulombiennes. Dans le prochain chapitre on fera une estimation de la fréquence de collision $\nu_{collision}$ de ces particules chargées. En plus du critère $g \ll 1$ (c.f. ci-dessous), on montrera dans un chapitre sur les ondes que des phénomènes collectifs dans le plasma se manifestent sur des échelles temporelles plus rapides que les temps caractéristiques associés aux collisions: c.à d.

$$\omega / \nu_{collision} \gg 1, \tag{29}$$

ou ω est la fréquence angulaire du phénomène collectif (onde) considéré.

2.2 Retour à la caractérisation du plasma

Le plasma a été défini comme:

- un mélange d'électrons et d'ions macroscopiquement neutre
- où les effets collectifs dominent sur les effets particuliers.

On peut maintenant donner une condition mathématique pour exprimer la deuxième partie de la définition. On demande que la quantité suivante

$$g = \frac{1}{n_0 \lambda_D^3}$$

soit bien inférieure à 1.

$$\mathbf{g} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}_0 \lambda_D^3} \ll \mathbf{1} \quad (30)$$

Cette relation veut simplement dire que **dans un cube d'arête égale à une longueur de Debye λ_D le nombre de particules chargées est grand.**

Explicitons g :

$$g = \frac{1}{n_0 \lambda_D^3} = \frac{e^2}{\lambda_D \varepsilon_0} \cdot \frac{1}{k_B T_e} \quad (31)$$

L'expression (31) indique que g est le rapport de l'énergie potentielle $\frac{e^2}{\lambda_D \varepsilon_0}$ entre deux particules de charge e (due à l'interaction de Coulomb) à l'énergie thermique $k_B T_e$. L'inégalité $g \ll 1$ indique que l'énergie potentielle d'interaction coulombienne est faible devant l'énergie thermique, ce qui correspond à la propriété d'un **gaz parfait** et on peut donc écrire $P = n k_B T$ où P est la pression.

Une caractérisation d'une grande variété de plasma en fonction de leur température, densité et paramètre plasma g est donnée dans la figure 20. Dans ce cours on va s'occuper uniquement de plasma non-relativistes qui satisfont le critère $g \ll 1$.

	Gaz parfait	Plasma
Distance entre particules (en moyenne)	$n^{-\frac{1}{3}}$	$n^{-\frac{1}{3}}$
Distance d'interaction	$\ll n^{-\frac{1}{3}}$	$\sim \lambda_D \gg n^{-\frac{1}{3}}$ ^a
$\frac{E_{\text{potentielle}}}{E_{\text{cinétique}}}$	$\ll 1$	$\ll 1$ ^b

^aCela signifie-t-il que les plasmas sont complètement différent des gaz parfaits en termes de leurs mécaniques statistiques?

^bComme pour les gaz parfaits, malgré la grande distance d'interaction dans le cas du plasma!

Table 4: Comparaison entre gaz parfait et plasma

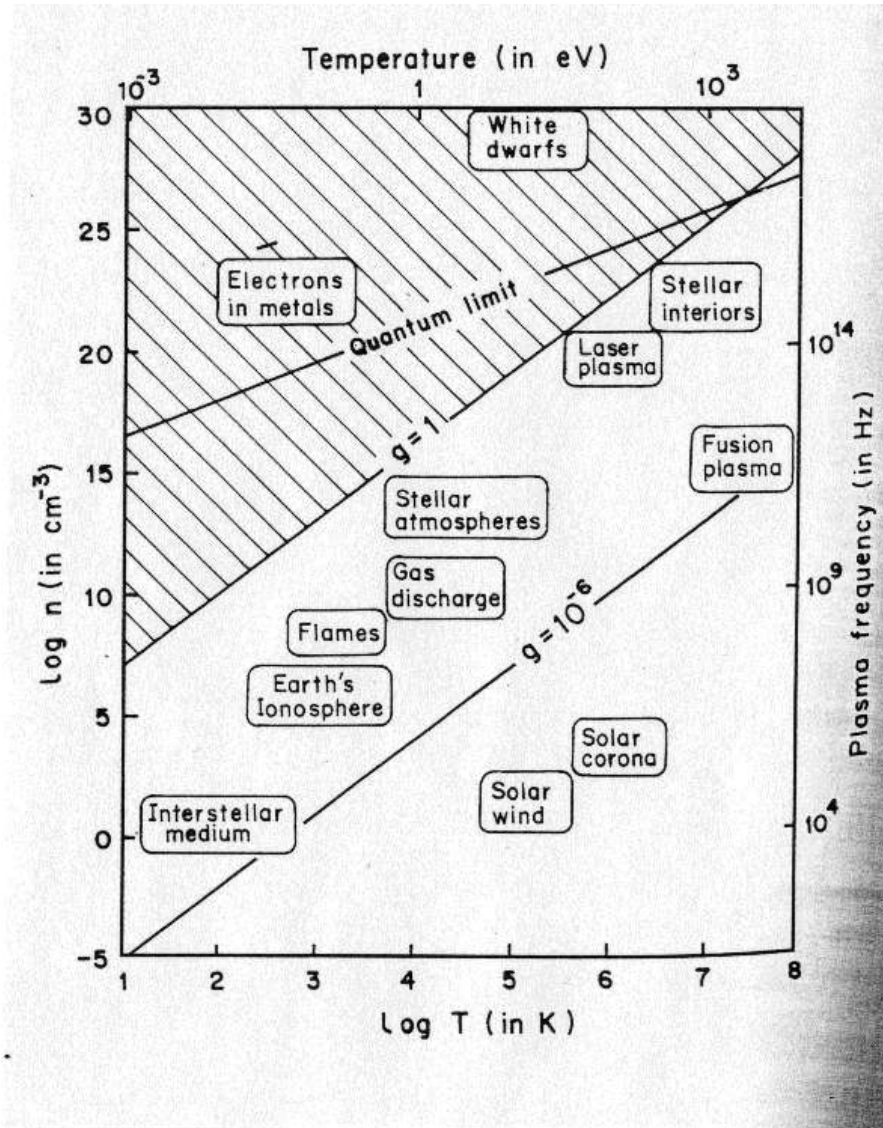


Figure 20: Caractérisation d'une grande variété de plasmas en fonction de leur température et densité (Figure tirée de: "The Physics of Fluids and Plasmas: Introduction for astrophysicists", A. Raichoudhuri, Cambridge University Press).

3 Collisions dans un plasma et phénomènes de transport

3.1 Collisions coulombiennes binaires

Soient deux particules de charge q_1 et q_2 et de masse m_1 et m_2 . Leurs positions sont \mathbf{r}_1 et \mathbf{r}_2 , leur vitesse relative à l'infini est \mathbf{v}_0 . Une des particules est la particule test et l'autre est la particule cible. Les équations du mouvement sont :

$$m_1 \frac{d^2 \mathbf{r}_1}{dt^2} = \frac{q_1 q_2}{4\pi \epsilon_0} \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{\|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\|^3} \quad (32)$$

$$m_2 \frac{d^2 \mathbf{r}_2}{dt^2} = \frac{q_1 q_2}{4\pi \epsilon_0} \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{\|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1\|^3} \quad (33)$$

On sait que les trajectoires sont des hyperboles (c.f. cours de mécanique).

Définissons le centre de masse :

$$\mathbf{R} = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} \quad (34)$$

En additionnant les équations (32) et (33), on voit que le centre de masse \mathbf{R} a une vitesse constante :

$$\frac{d^2 \mathbf{R}}{dt^2} = \frac{1}{m_1 + m_2} \left\{ m_1 \frac{d^2 \mathbf{r}_1}{dt^2} + m_2 \frac{d^2 \mathbf{r}_2}{dt^2} \right\} = 0 \quad (35)$$

Définissons la position relative $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$. En prenant la différence entre les équations (32) et (33), on obtient :

$$\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mu \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \frac{q_1 q_2}{4\pi \epsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{r^3} = -q_1 \nabla V(r) \quad (36)$$

avec

$$\mathbf{E} = -\nabla V \quad (37)$$

et

$$V(r) = \frac{q_1 q_2}{4\pi \epsilon_0 r}. \quad (38)$$

L'équation (36) montre que la position relative r a le même mouvement que celui d'une particule de masse $m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ dans le champ coulombien

d'une charge fixe. C'est le problème classique d'une particule dans un potentiel central.

La masse

$$\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2) \quad (39)$$

est appelée la **masse réduite**.

De cette manière nous pouvons déterminer $\mathbf{r}_1(t)$ et $\mathbf{r}_2(t)$ à partir de $\mathbf{R}(t)$ et $\mathbf{r}(t)$:

$$\mathbf{r}_1(t) = \mathbf{R} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{r}(t) \quad (40)$$

$$\mathbf{r}_2(t) = \mathbf{R} - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{r}(t) \quad (41)$$

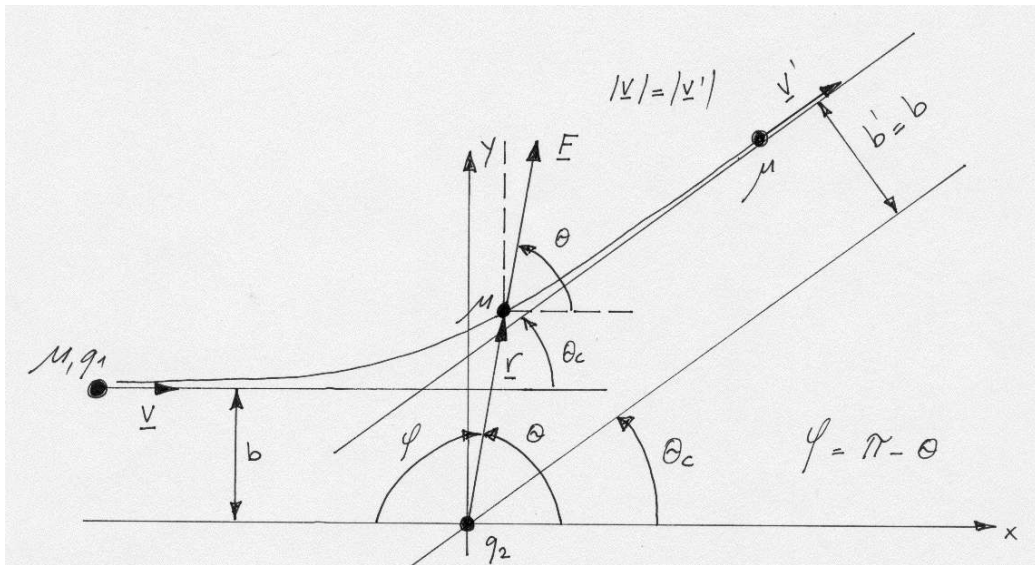


Figure 21: Géométrie du problème. On considère qu'à $t \rightarrow -\infty$, la vitesse est $\mathbf{v} = v \mathbf{e}_x$ avec un paramètre d'impact b .

3.1.1 Propriété d'une particule soumise à un potentiel central

- Conservation de l'énergie:

$$T + V = E \quad (42)$$

- Conservation du moment cinétique:

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \wedge \mathbf{p} \quad (43)$$

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = 0 \quad (44)$$

$$\Rightarrow \mathbf{L} = \text{const} \quad (45)$$

- Mouvement plan:

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{r} = 0 \quad (46)$$

$$\Rightarrow \mathbf{L} \perp \mathbf{r} \quad (47)$$

En se référant à la géométrie de la Figure 21, considérons l'équation du mouvement pour la composante y de la vitesse:

$$\mu \frac{dv_y}{dt} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \sin \theta = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \sin \varphi \quad (48)$$

Appliquons la conservation du moment cinétique:

à $t = -\infty$, nous avons:

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{r} = -x\mathbf{e}_x + b\mathbf{e}_y \\ \mathbf{p} = \mu v\mathbf{e}_x \end{array} \right\} \mathbf{L} = -\mu v b \mathbf{e}_z = \text{const} \quad (49)$$

à $t = t$:

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{r} = r\mathbf{e}_r \\ \mathbf{p} = \mu \dot{r}\mathbf{e}_r + \mu r \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta \end{array} \right\} \mathbf{L} = \mu r^2 \dot{\theta} \mathbf{e}_z \quad (50)$$

Ainsi en appliquant la conservation du moment cinétique on obtient:

$$\begin{aligned} \mu r^2 \dot{\theta} &= -\mu r^2 \dot{\varphi} = -\mu v b \\ \Rightarrow r^2 &= \frac{v b}{\dot{\varphi}} \end{aligned} \quad (51)$$

Nous pouvons alors réécrire l'équation (48) de la façon suivante:

$$\frac{dv_y}{dt} = \frac{q_1 q_2}{\mu 4\pi\epsilon_0 v b} \sin \varphi \dot{\varphi} = C \sin \varphi \dot{\varphi}$$

$$\Delta V_y = C \int_{\varphi_0}^{\varphi_f} \sin \varphi \dot{\varphi} dt = C [-\cos \varphi]_{\varphi_0}^{\varphi_f}$$

$$\Delta V_y = C(\cos \varphi_0 - \cos \varphi_f) \text{ avec } \varphi_0 = 0 \text{ et } \varphi_f = \pi - \theta_c$$

Nous avons alors:

$$\Delta V_y = v \sin \theta_c = \frac{q_1 q_2}{4\pi \varepsilon_0 \mu v b} \left[1 - \underbrace{\cos(\pi - \theta_c)}_{-\cos \theta_c} \right] \quad (52)$$

$$\Rightarrow \frac{\sin \theta_c}{1 + \cos \theta_c} = \frac{q_1 q_2}{4\pi \varepsilon_0 \mu v^2 b} = \frac{b_0}{b}$$

$$\tan \frac{\theta_c}{2} = \frac{b_0}{b} \quad (53)$$

où b_0 est égal à:

$$b_0 = \frac{q_1 q_2}{4\pi \varepsilon_0 \mu v^2} \quad (54)$$

Notons que θ_c n'est l'angle de déflexion de la particule test que si l'on suppose que la particule cible reste immobile. Si la particule cible bouge lors de la collision, il faudra repasser dans le référentiel du laboratoire pour déterminer l'angle de déflexion.

3.1.2 Section efficace de Rutherford

Nous nous plaçons pour le reste des calculs dans le référentiel du centre de masse, où θ_c est l'angle de déflexion. Au lieu d'une connaissance exacte du paramètre d'impact b de la particule incidente, nous supposons uniquement qu'elle est incidente sur un élément de surface $dS = 2\pi b db$ comme indiqué dans la figure 22. La **section efficace différentielle**, $d\sigma(\theta_c, \psi)/d\Omega$, est définie par la probabilité $[d\sigma(\theta_c, \psi)/d\Omega] d\Omega$ que cette particule soit diffusée dans un angle solide $d\Omega = 2\pi \sin \theta_c d\theta_c^4$. Si nous avons N particules incidentes par unité de surface et unité de temps, $|2\pi b db|N$ particules seront diffusées dans l'angle solide $d\Omega$. Par définition de la section efficace différentielle se nombre est aussi égal à $[d\sigma(\theta_c)/d\Omega]d\Omega N$ ce qui formellement s'écrit:

$$[d\sigma(\theta_c)/d\Omega]d\Omega = -2\pi b db \quad (55)$$

avec le signe $-$ puisque $db/d\theta_c$ est négatif.

⁴Dans notre cas la section efficace différentielle est indépendante de ψ

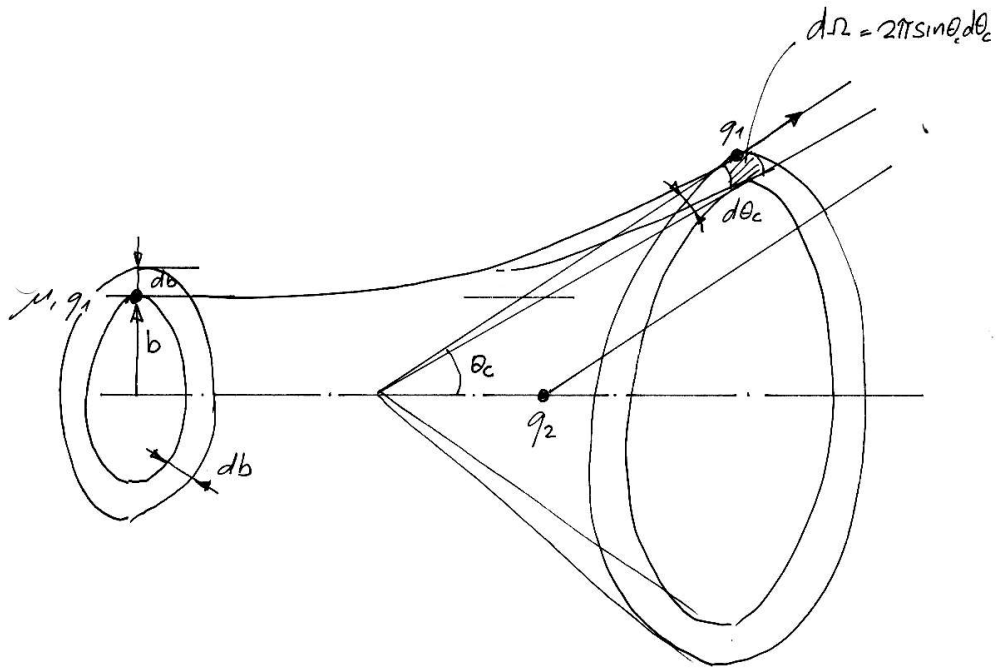


Figure 22: Géométrie utilisée pour le calcul de la section efficace différentielle.

On peut réécrire l'équation (55) comme:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta_c) = \frac{b}{\sin \theta_c} \left| \frac{db}{d\theta_c} \right| = \frac{b}{2 \sin \frac{\theta_c}{2} \cos \frac{\theta_c}{2}} \left| \frac{db}{d\theta_c} \right| \quad (56)$$

En dérivant $\tan(\theta_c/2)$ par rapport à b , on obtient alors $db/d\theta_c$:

$$\left| \frac{db}{d\theta_c} \right| = b_0 \frac{1}{2 \sin^2(\theta_c/2)}$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta_c) = \left| \frac{1}{2} \frac{b_0}{\sin(\theta_c/2) \cos(\theta_c/2)} \frac{1}{\tan(\theta_c/2)} \frac{b_0}{2 \sin^2(\theta_c/2)} \right|$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta_c) = \frac{1}{4} \left(\frac{b_0}{\sin^2(\theta_c/2)} \right)^2 \quad (57)$$

La formule (57) est la **section efficace de Rutherford**.

Notez les points suivants:

- Historiquement cette expression a été utilisée pour étudier la diffusion des particules α (noyau d'He) à travers des feuilles de métal.
- La déviation de $\frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta_c) \propto \frac{1}{\sin^4(\theta_c/2)}$ à haute énergie (petit b_0) a permis de mettre en évidence la présence de forces nucléaires à courte portée.
- Pour un angle de diffusion θ_c donné, la section efficace varie en $(v_0)^{-4}$ puisque b_0 varie en $(v_0)^{-2}$. Puisque le nombre de collisions par unité de temps est proportionnel à $v_0 \frac{d\sigma}{d\Omega} \propto \frac{1}{v_0^3}$, on remarque que les effets collisionnel ont une dépendance en $1/T^{3/2}$.

Pour illustrer ces calculs, considérons la déflexion d'un électron par un **ion immobile** de charge e . La valeur de θ_c est donnée par :

$$\tan(\theta_c/2) = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e v_0^2 b} \quad (58)$$

Le paramètre d'impact b_{90° qui donne lieu à une déflexion de 90° est :

$$b_0 = b_{90^\circ} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e v_0^2} \quad (59)$$

Toutes les particules qui ont un paramètre d'impact $b < b_{90^\circ}$ seront diffusées dans un angle égal ou supérieur à 90° . On peut donc calculer la section efficace pour des collisions qui donnent lieu à des déflexions supérieures à 90° comme :

$$\sigma(\theta_c \geq 90^\circ) = \int_{\theta_c=\pi/2}^{\theta_c=\pi} \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega = \frac{1}{4} b_0^2 \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{1}{\sin^4(\theta/2)} 2\pi \sin \theta d\theta \quad (60)$$

$$\sigma(\theta_c \geq 90^\circ) = \pi b_0^2 \quad (61)$$

L'expression de cette section efficace en fonction de l'énergie cinétique de l'électron incident donne:

$$\sigma(\theta_c \geq 90^\circ) = \frac{1.6 \cdot 10^{-18}}{E_{cin}^2 [eV]} [m^2] \quad (62)$$

Pour un électron test de 1 keV d'énergie cinétique, on a :

$$\sigma(\theta_c \geq 90^\circ) = 1.6 \cdot 10^{-20} [cm^2]$$

$$b_{90^\circ} = 7.2 \cdot 10^{-11} [cm]$$

3.2 Le logarithme coulombien

Montrons que dans un plasma les collisions qui donnent lieu à de petites déflexions dont l'effet cumulé donne lieu à une grande déflexion sont beaucoup plus fréquentes que les collisions qui donnent lieu en une fois à une grande déflexion. La différence entre ces deux situations est schématisée dans la figure 23.

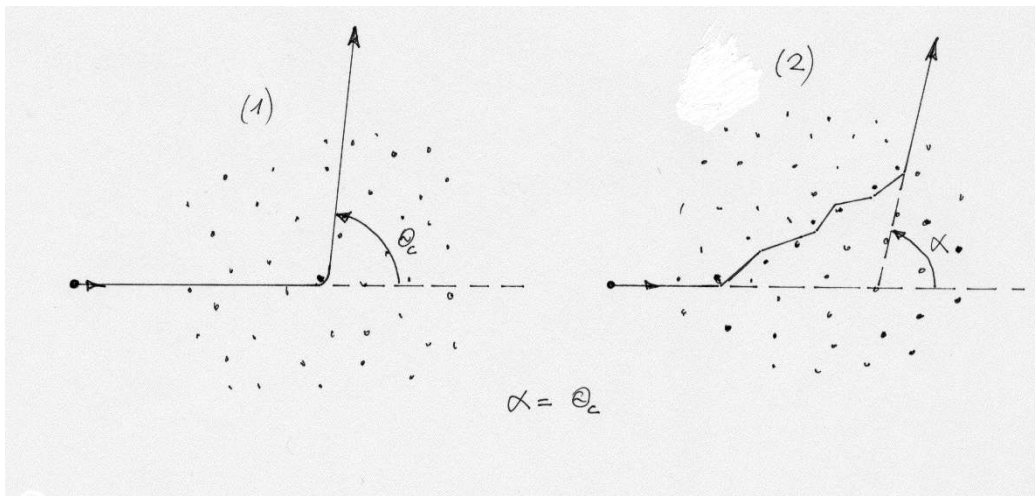


Figure 23: Processus collisionnel qui donne lieu à: (1) un grand angle de déflexion lors d'une seule collision, (2) un grand angle de déflexion après l'effet cumulé d'une multitude de déflexions indépendantes à petit angle.

Nous considérons de nouveau les collisions d'électrons avec des ions immobiles. Rappelons l'équation (58) :

$$\tan\left(\frac{\theta_c}{2}\right) = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 \mu v_0^2 b} = \frac{b_0}{b}$$

Pour des faibles déflexions $\theta_c = \Delta\theta \ll 1$, nous pouvons faire l'approximation suivante (c.f. figure 24):

$$\tan \frac{\theta_c}{2} = \frac{\theta_c}{2} = \frac{\Delta\theta}{2} = \frac{b_0}{b} \Rightarrow \Delta\theta^2 = 4 \frac{b_0^2}{b^2}$$

Dans cette approximation, pour une collision avec paramètre d'impact b , on a:

$$\Delta\theta_{1coll}^2 = 4 \frac{b_0^2}{b^2}$$

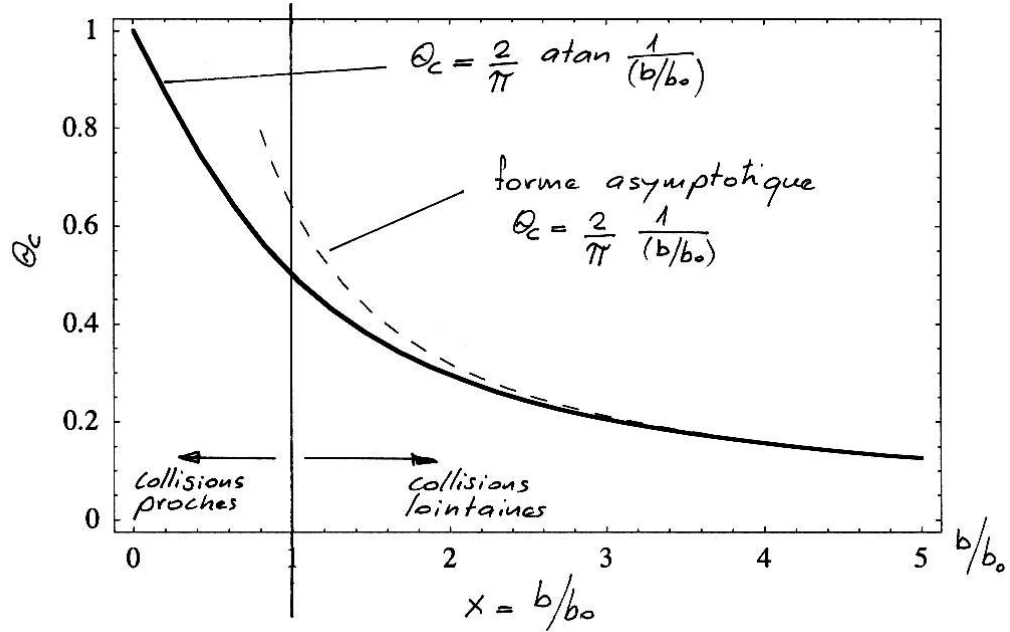


Figure 24: Comparaison entre valeur exacte de l'angle de déflexion et sa forme asymptotique valable pour de petits angles de déflexion. Notez que l'angle θ_c dans la figure est normalisé à π .

La moyenne de $\Delta\theta_{1coll}$ sur tous les paramètres d'impact est nulle car il s'agit d'une marche aléatoire.

La moyenne de $\Delta\theta_{1coll}^2$ sur tous les paramètres d'impact est non-nulle:

$$\begin{aligned} \langle \Delta\theta^2 \rangle_{1coll} &= \frac{1}{\pi b_{max}^2} \int_{b_{min}}^{b_{max}} \Delta\theta_{1coll}^2 2\pi b db = \frac{1}{\pi b_{max}^2} \int_{b_{min}}^{b_{max}} 4 \frac{b_0^2}{b^2} 2\pi b db \\ \langle \Delta\theta^2 \rangle_{1coll} &= 8 \frac{b_0^2}{b_{max}^2} \ln\left(\frac{b_{max}}{b_{min}}\right) = 8 \frac{b_0^2}{b_{max}^2} \ln(\Lambda) \end{aligned} \quad (63)$$

On note que l'expression (63) contient une divergence logarithmique si aucun choix de b_{max} n'est spécifié. Dans un plasma, le champ coulombien est écranté à partir d'une distance égale à la distance de Debye λ_D : on prendra donc b_{max} égal à λ_D :

$$b_{max} = \lambda_D = \left(\frac{\varepsilon_0 k_B T}{n e^2} \right)^{1/2} \quad (64)$$

Pour b_{min} nous nous rappelons que nous avons considéré seulement des faibles

déflexions $\Delta\theta$. On peut choisir arbitrairement b_0 ce qui est consistant avec des angles de déflexion plus petits que 90^0 .

Dans le cas classique⁵ on a:

$$b_{min} = b_0 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e v^2} = \frac{e^2}{12\pi\epsilon_0 k_B T} \quad (66)$$

où dans la dernière égalité de (66) on a utilisé $\frac{1}{2}m_e\langle v^2 \rangle = \frac{3}{2}k_B T$

On voit que les valeurs de b_{max} et b_{min} ne sont pas importantes car elles apparaissent comme argument d'un logarithme.

Sur un temps t , l'électron subit $n_i\pi b_{max}^2 vt$ collisions avec les ions. Puisqu'on a des **processus indépendants**, il vient:

$$\langle \Delta\theta^2 \rangle(t) = \langle \Delta\theta^2 \rangle_{1coll} n_i \pi b_{max}^2 vt = 8\pi n_i b_0^2 \ln(\Lambda) vt \quad (67)$$

En posant $t = \tau_{90}$, on trouve la condition pour une déflexion de 90 degrés due à des multiples déflexions à petits angles:

$$\langle \Delta\theta^2 \rangle(t) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = 8\pi n_i b_0^2 \ln(\Lambda) v \tau_{90}$$

La fréquence de collisions pour une déflexion à 90 degrés est donc:

$$\nu_{90} = \frac{1}{\tau_{90}} = \frac{32}{\pi} n_i b_0^2 \ln(\Lambda) v$$

A partir de la relation $\nu_{90} = n_i \sigma_{90} v$ on trouve:

$$\sigma_{90} = \frac{32}{\pi} b_0^2 \ln(\Lambda) \quad (68)$$

Calculons une valeur numérique de σ_{90} . **Les valeurs de $\ln(\Lambda)$ sont typiquement de l'ordre de 10-20** pour les plasmas d'intérêt (voir table 5).

⁵Dans un cas quantique, pour déterminer b_{min} il faut tenir compte de la longueur de de Broglie, λ_B , associée à l'électron incident. On aura donc que si $b_0 < \lambda_B$ alors:

$$b_{min} = \lambda_B = \frac{h}{\sqrt{3m_e k_B T}} \quad (65)$$

et λ_B a été calculée avec $p = m_e v_e = h/\lambda_B$ et h est la constante de Planck.

Température	Densité n		
	10^9 cm^{-3}	10^{12} cm^{-3}	10^{15} cm^{-3}
10^4 °K	12.8	5.97	5.97
10^6 °K	19.3	15.9	12.4
10^8 °K	24	20.6	17

Table 5: Valeurs de $\ln(\Lambda)$ en fonction de la température T et de la densité n.

Le rapport entre la section efficace σ_{90} et celle correspondant à une collision donnant lieu à un grand angle de déflexion (≥ 90 degrés), $\sigma(\geq 90)_{1coll}$, est:

$$\frac{\sigma_{90}}{\sigma(\geq 90)_{1coll}} = \frac{32}{\pi^2} \ln(\Lambda) \quad (69)$$

Pour $\ln(\Lambda) = 20$, on a

$$\sigma_{90} = \frac{2.6 \cdot 10^{-16}}{E_{cin}^2 [eV]} [m^2]$$

ce qui est environ 65 fois la valeur de la section efficace correspondant à des collisions donnant lieu à une grande déflexion.

Dans un plasma, les petites déflexions donnant lieu d'une manière cumulée à une grande déflexion sont plus nombreuses que les collisions qui donnent lieu en une fois à une grande déflexion.

Le **libre parcours moyen** λ_{mfp} est donc :

$$\lambda_{mfp} = \frac{1}{n\sigma_{90}} = \frac{2\pi\varepsilon_0^2 m_e^2 v_0^4}{ne^4 \ln(\Lambda)} \quad (70)$$

La **fréquence de collision** ν est alors:

$$\nu = \frac{v_0}{\lambda_{mfp}} = \frac{ne^4 \ln(\Lambda)}{2\pi\varepsilon_0^2 m_e^2 v_0^3} \quad (71)$$

La fréquence de collision varie comme $1/v_0^3$: les particules tests de très grande vitesse ne ressentent plus les collisions coulombiennes!

3.3 Fréquence de collisions dans un plasma

Dans un plasma le calcul des fréquences de collisions doit tenir compte de plusieurs facteurs. Pour se fixer les idées, discutons du cas des collisions coulombiennes des électrons (particules tests) avec de ions (particules cibles). Tout d'abord, même si la masse des ions est beaucoup plus grande que celle des électrons, les ions lors de la collision ne restent pas immobiles. Donc $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ ne décrit pas le mouvement de la particule test (l'électron), et en particulier θ_c n'est plus l'angle de déflexion (ce problème est traité dans les cours de mécanique générale). Mais la complexité ne vient pas principalement de ce point. Dans un plasma, les électrons et les ions ont une distribution de vitesse et tous les calculs doivent tenir compte de ce fait.

Nous n'allons pas faire le calcul en détail (qui seront fait dans le cours de Physique des Plasmas II, ainsi que dans: Goldston "Introduction to Plasma Physics" chap. 11.2), mais simplement donner les diverses fréquences de collisions, en prenant des fonctions de distribution maxwelliennes :

Fréquence de **collision électron-ion** $\langle \nu_{e-i} \rangle$:

$$\langle \nu_{e-i} \rangle = \frac{\sqrt{2} n_i Z^2 e^4 \ln(\Lambda)}{12\pi^{3/2} \varepsilon_0^2 m_e^{1/2} T_e^{3/2}} \quad (72)$$

où n_i est la densité ionique, Z la charge des ions, m_e la masse des électrons et T_e la température électronique exprimée en eV. Le symbole $\langle \dots \rangle$ signifie que l'on tient compte des distributions de vitesses maxwelliennes pour les ions et les électrons.

Fréquence de **collision électron-électron** $\langle \nu_{e-e} \rangle$:

$$\langle \nu_{e-e} \rangle = \frac{n_e e^4 \ln(\Lambda)}{\varepsilon_0^2 m_e^{1/2} T_e^{3/2}} = \frac{\langle \nu_{e-i} \rangle}{n_i Z^2 / n_e} \quad (73)$$

n_e étant la densité électronique et $\langle \dots \rangle$ indique que la moyenne est prise sur une fonction de distribution maxwellienne.

Fréquence de **collision ion-ion** $\langle \nu_{i-i} \rangle$:

$$\langle \nu_{i-i} \rangle = \frac{n_i Z^4 e^4 \ln(\Lambda)}{12\pi^{3/2} \varepsilon_0^2 m_i^{1/2} T_i^{3/2}} = \frac{\langle \nu_{e-i} \rangle Z^2}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{m_e}{m_i}} \left(\frac{T_e}{T_i} \right)^{3/2}$$

où m_i est la masse des ions et T_i la température ionique exprimée en eV.

Pour un plasma d'hydrogène avec une densité n et $\ln(\Lambda)$ de l'ordre de 20, nous avons:

$$\langle \nu_{e-e} \rangle [s^{-1}] = \langle \nu_{e-i} \rangle [s^{-1}] = 5 \cdot 10^{-11} n [m^{-3}] / T_e^{3/2}$$

$$\langle \nu_{i-i} \rangle [s^{-1}] = 10^{-12} n [m^{-3}] / T_i^{3/2}$$

3.4 Phénomènes de transport

Les phénomènes de collisions que nous avons décrits auparavant nous permettent maintenant de définir les coefficients de transport dans un plasma.

3.4.1 Résistivité électrique

Considérons le cas de la résistivité électrique η ⁶:

$$\mathbf{E} = \eta \mathbf{j} \quad (74)$$

La densité de courant électrique \mathbf{j} est définie par :

$$\mathbf{j} \simeq -n_e e \mathbf{u}_e \quad (75)$$

où \mathbf{u}_e est la vitesse fluide des électrons⁷.

L'équation du mouvement pour un élément fluide d'électrons est:

$$m_e n_e \frac{d\mathbf{u}_e}{dt} = -en_e \mathbf{E} + \mathbf{R}_{e,i} = -en_e \mathbf{E} - \langle \nu_{e-i} \rangle n_e m_e \mathbf{u}_e \quad (76)$$

où $\mathbf{R}_{e,i}$ est le terme de frottement que les ions imposent sur les électrons.

A l'équilibre ($\frac{d}{dt} = 0$), la relation entre le champ électrique \mathbf{E} et \mathbf{u}_e est :

$$-e\mathbf{E} - m_e \langle \nu_{e-i} \rangle \mathbf{u}_e = 0 \quad (77)$$

⁶ En général la résistivité est un tenseur (par exemple pour un plasma magnétisé). La conductibilité σ est définie comme $1/\eta$.

⁷ On verra plus tard, dans la description du modèle MHD que la vitesse des ions est normalement négligeable ce qui équivaut de négliger leur contribution à la densité de courant \mathbf{j} .

L'équation (77) exprime simplement que le champ électrique \mathbf{E} doit compenser la perte d'impulsion due aux collisions avec les ions.

Nous avons donc immédiatement :

$$\mathbf{j} = -n_e e \mathbf{u}_e = \frac{e^2 n_e \mathbf{E}}{m_e \langle \nu_{e-i} \rangle} = \frac{\mathbf{E}}{\eta} \quad (78)$$

$$\eta = \frac{m_e \langle \nu_{e-i} \rangle}{n e^2}$$

$$\eta = \frac{\sqrt{2} m_e^{1/2} Z e^2 \ln(\Lambda)}{12 \pi^{3/2} \varepsilon_0^2 T_e^{3/2}} \quad (79)$$

L'équation (79) permet de tirer les conclusions suivantes:

- La résistivité η , selon l'équation (79), est inversement proportionnelle à $T_e^{3/2}$: plus le plasma est chaud, moins il est résistif. Ce fait est différent de la résistivité électrique dans les métaux qui augmente avec la température et rend impraticable le chauffage par effet Joule d'un plasma jusqu'au domaine de température où les réactions de fusion ont lieu.
- Il est important de remarquer que dans un plasma **complètement ionisé**, où les collisions avec les particules neutres sont négligeables, la résistivité ne dépend pas de la densité de particules puisque la neutralité impose que $Z n_i = n_e$.
- Dans un plasma **faiblement ionisé**, où les collisions avec les particules neutres sont dominantes, on a que $\langle \nu_{e-n} \rangle \propto n_n$ avec la densité des neutres étant n_n . En remplaçant dans l'équation (78) $\langle \nu_{e-i} \rangle$ avec $\langle \nu_{e-n} \rangle$ il vient que $\mathbf{j} \propto \frac{n_e}{n_n}$

Lorsque l'on calcule précisément la résistivité, on constate que le résultat (79) est une surestimation d'un facteur 2. Ceci provient du fait que la fréquence de collision $\langle \nu_{e-i} \rangle$ a été calculée avec une fonction de distribution maxwellienne, alors que dans la réalité en présence de courant celle-ci est déformée.

La valeur correcte de la résistivité est donc:

$$\eta = \frac{\sqrt{2} m_e^{1/2} Z e^2 \ln(\Lambda)}{24 \pi^{3/2} \varepsilon_0^2 T_e^{3/2}} [\Omega m] \quad (80)$$

où T_e est exprimé en eV et Z est la charge du ion⁸. Pour un plasma d'hydrogène ($Z = 1$), la résistivité est donnée par :

$$\eta = 5 \cdot 10^{-5} \frac{\ln(\Lambda)}{T_e^{3/2}} [\Omega m]$$

Pour $T_e=100$ eV, il a une conductibilité comparable à celle de l'acier ($7 \times 10^{-7} \Omega m$). A 1 keV, la conductibilité est inférieure à celle du cuivre ($2 \times 10^{-8} \Omega m$).

3.4.2 Chauffage ohmique d'un plasma

On verra que dans un Tokamak, le chauffage naturel du plasma est le chauffage ohmique qui est une conséquence de la résistivité finie du plasma.

La densité de puissance, $\frac{dP_\Omega}{dV}$ [W/m³], de ce type de chauffage s'écrit comme:

$$\frac{dP_\Omega}{dV} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{j} = \eta \mathbf{j}^2 \propto \frac{1}{T_e^{3/2}} \quad (81)$$

à densité de courant fixe, la puissance ohmique décroît comme $1/T_e^{3/2}$.

A très haute température le chauffage ohmique perd son efficacité. Ceci implique que pour atteindre les températures du plasma requise dans un réacteur de fusion un chauffage auxiliaire (autre que l'ohmique) est nécessaire.

3.4.3 Transfert d'énergie

Dans un plasma qui n'est pas encore à l'équilibre thermodynamique, nous pouvons nous poser la question à quelles échelles de temps les diverses composantes (électrons et ions) se thermalisent-elles. Nous donnons ici seulement sans démonstration les divers temps de thermalisation :

Temps $\tau_{eq ee}$ pour que les électrons se thermalisent entre eux:

$$\tau_{eq ee} = 1.22 \cdot 10^6 \frac{T_e^{3/2}}{n \ln(\Lambda)} [s]$$

⁸Pour un plasma contenant plusieurs espèces d'ions, Z est remplacé par Z_{eff} :

$$Z_{eff} = \frac{\sum_j n_j Z_j^2}{\sum_j n_j Z_j}$$

$$[T_e] = \text{eV}, [n] = \text{cm}^{-3}$$

$$\nu_{eqee} = \frac{1}{\tau_{eqee}} = 8.2 \cdot 10^{-7} n \ln(\Lambda) T_e^{-3/2} \text{ [s}^{-1}\text{]}$$

Temps τ_{eqii} pour que les ions se thermalisent entre eux:

$$\tau_{eqii} = 5.26 \cdot 10^7 \frac{T_i^{3/2}}{n Z^2 \mu^{-1/2} \ln(\Lambda)} \text{ [s]}$$

avec $[T_i] = \text{eV}, [n] = \text{cm}^{-3}, \mu = \frac{m_i}{m_{proton}}$

$$\nu_{eqii} = \frac{1}{\tau_{eqii}} = 1.9 \cdot 10^{-8} n Z^2 \mu^{-1/2} \ln(\Lambda) T_i^{-3/2} \text{ [s}^{-1}\text{]}$$

Temps τ_{eq} pour que les électrons et les ions se thermalisent entre eux:

$$\tau_{eq} = 3.13 \cdot 10^8 \frac{T^{3/2}}{n Z^2 \mu^{-1} \ln(\Lambda)} \text{ [s]}$$

avec $[T] = \text{eV}, [n] = \text{cm}^{-3}, \mu = \frac{m_i}{m_{proton}}$

$$\nu_{eq} = \frac{1}{\tau_{eq}} = 3.2 \cdot 10^{-9} n Z^2 \mu^{-1} \ln(\Lambda) T^{-3/2} \text{ [s}^{-1}\text{]}$$

On note que:

$$\tau_{eqee} < \tau_{eqii} < \tau_{eq}$$

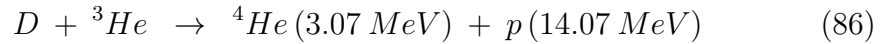
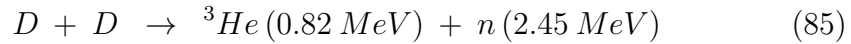
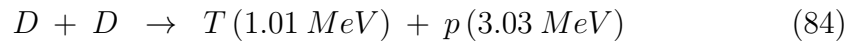
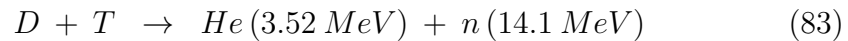
4 Introduction à la fusion thermonucléaire

4.1 Principe

Considérons l'énergie de liaison par nucléon⁹ pour différents noyaux (cf. figure 25). En examinant la figure 25, nous constatons que deux types de réactions peuvent donner lieu à une libération d'énergie:

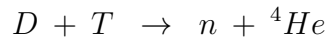
- la fission des noyaux lourds (comme l'uranium ^{235}U)
- la fusion des noyaux légers

Les principales réactions de fusion d'intérêt pour la production d'énergie sur terre sont:



Dans les réactions (83) et (85), la majeure partie de l'énergie résultant de la réaction de fusion est emportée par des neutrons énergétiques. C'est en ralentissant ces neutrons dans un milieu adéquat (dans un réacteur, on appelle la région où se trouve ce milieu le manteau, en anglais blanket) que l'on transforme l'énergie cinétique en énergie thermique qui peut être convertie en électricité.

Le fait que ces réactions soient exo-thermiques provient du défaut de masse. Considérons la relation D-T:



Nous avons les masses suivantes pour les membres de gauche et de droite :

⁹L'énergie de liaison par nucléons est définie comme:

$$E_b = \Delta mc^2 = (Zm_p + (A - Z)m_n - m_{\text{noyau}})c^2 \quad (82)$$

où A est le nombre de nucléons qui compose le noyau et Z est le nombre de protons.

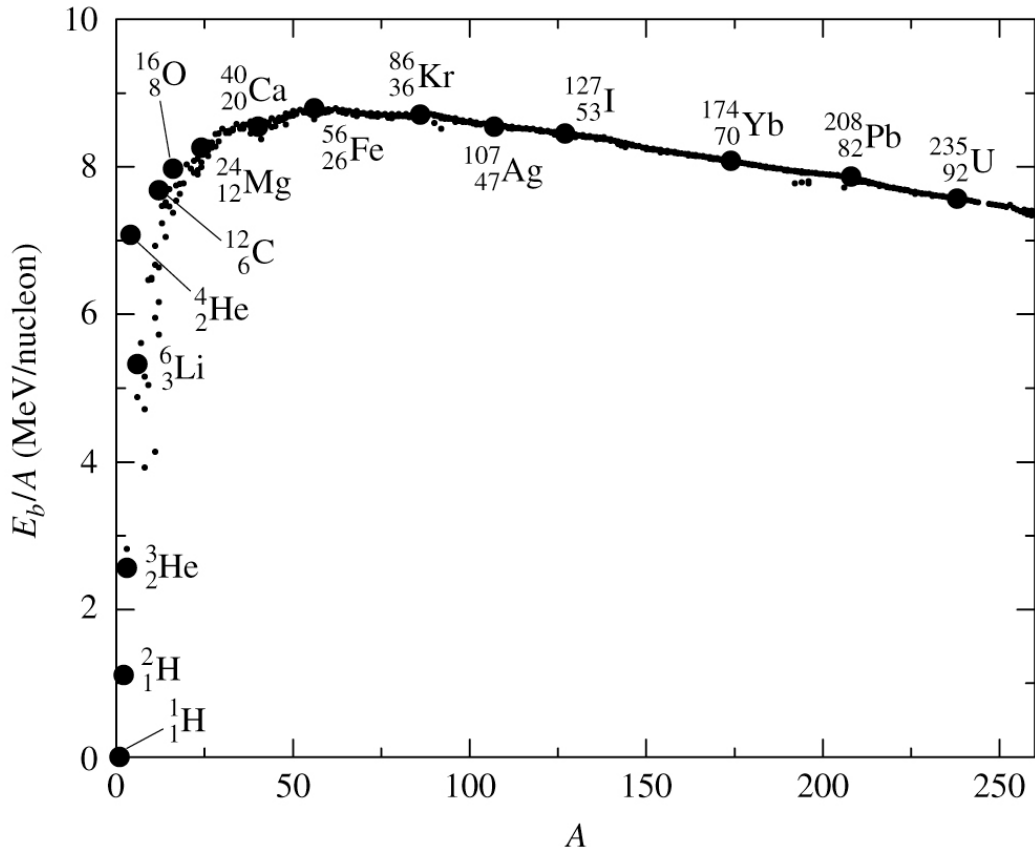


Figure 25: Energie de liaison par nucléon (Tiré de "B. W. Carrol, D.A. Ostile, An Introduction to modern Astrophysics, 2nd edition, Pearson International Edition, 2007")

Membre de gauche:

$$(2 - 0.000994) m_{proton} + (3 - 0.006284) m_{proton} = 4.992722 m_{proton}$$

Membre de droite:

$$(1 + 0.001378) m_{proton} + (4 - 0.027404) m_{proton} = 4.973974 m_{proton}$$

La différence de masse $\delta m = 0.018747 m_{proton}$ se retrouve dans l'énergie des particules selon la relation:

$$\begin{aligned} E &= c^2 \delta m = (2.9979 \cdot 10^8)^2 \cdot 0.018748 \cdot 1.6726 \cdot 10^{-27} \\ &= 2.818 \cdot 10^{-12} J = 17.59 MeV \end{aligned} \quad (87)$$

où nous avons utilisé $c = 2.9979 \cdot 10^8 m/s$, $m_{proton} = 1.6726 \cdot 10^{-27} kg$.

La deuxième branche de la réaction $D - D$ (84) et la réaction $D - {}^3\text{He}$ (86) produisent des protons qui peuvent être directement convertis en énergie électrique.

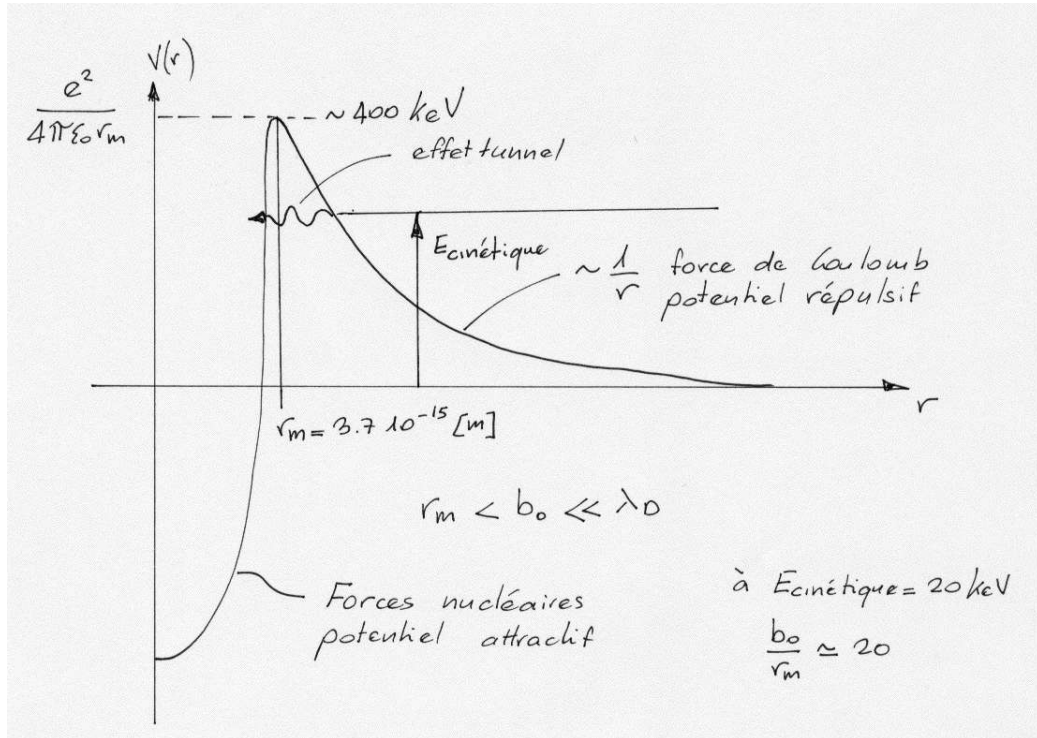


Figure 26: Représentation du potentiel coulombien entre deux noyaux en fonction de leur distance r .

Comment a lieu une réaction de fusion entre deux noyaux? Les noyaux ayant une même charge positive subissent une répulsion coulombienne lorsqu'ils s'approchent l'un de l'autre (c.f. Fig.26). Pour la réaction D-T, le potentiel de répulsion atteint son maximum pour un rayon minimal $r_{min} = 3.7 \times 10^{-15}$ m: la barrière de potentiel est alors de 400 keV. Fort heureusement (pour la réalisation de la fusion !) les ions ne doivent pas avoir une énergie relative de 400 keV pour que la réaction de fusion ait lieu. En effet, l'effet tunnel permet à des noyaux d'énergie E_{cin} inférieure de pénétrer dans la région où le potentiel est attractif. La section efficace

de fusion pour les réactions D-T, D-D et D- ${}^3\text{He}$ est indiquée sur la Fig.27. On note immédiatement que les sections efficaces ne sont appréciables que pour des énergies très élevées, supérieures au keV.

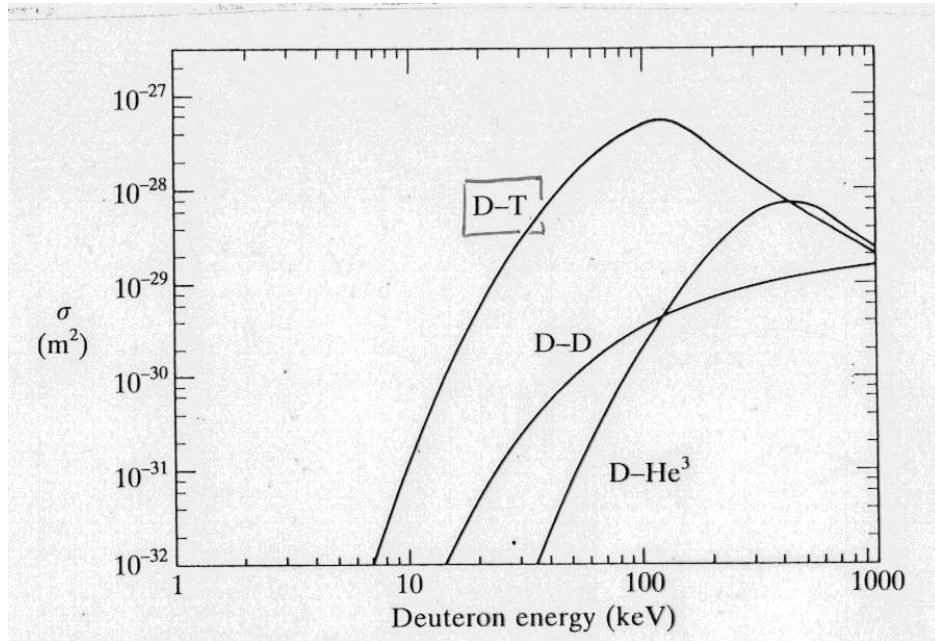
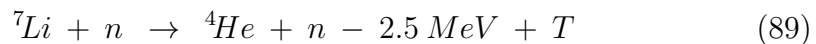
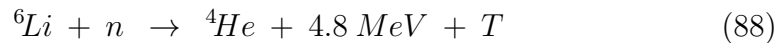


Figure 27: Section efficace des réactions de fusion (Tiré de "Tokamaks" de J. Wesson)

La manière d'atteindre ces valeurs de section efficace est d'utiliser un gaz dont la température est dans le même ordre de grandeur. Un tel gaz est alors complètement ionisé car les températures correspondantes sont supérieures à toutes les énergies de cohésion électron-noyau qui sont de l'ordre de la dizaine d'eV pour les électrons périphériques: nous sommes alors en présence d'un plasma.

Avant de discuter des caractéristiques auxquelles doit satisfaire un plasma thermonucléaire, discutons de la question du "combustible". On voit que la réaction $D - T$ a la plus grande section efficace. Au vu des problèmes technologiques et scientifiques de la fusion, on a choisi le $D - T$ comme première approche. Si le D est abondant (abondance par rapport à l'hydrogène: 1/6700), l'isotope T est instable (demi-vie: 12.3 années avec une désintégration β^- de 18.1 keV) et doit être produit par les réactions suivantes:



Les isotopes ${}^6\text{Li}$ et ${}^7\text{Li}$ ont une abondance relative de 7.5% et 92.5%. La réaction avec le ${}^7\text{Li}$ est endothermique. Dans un réacteur la régénération du

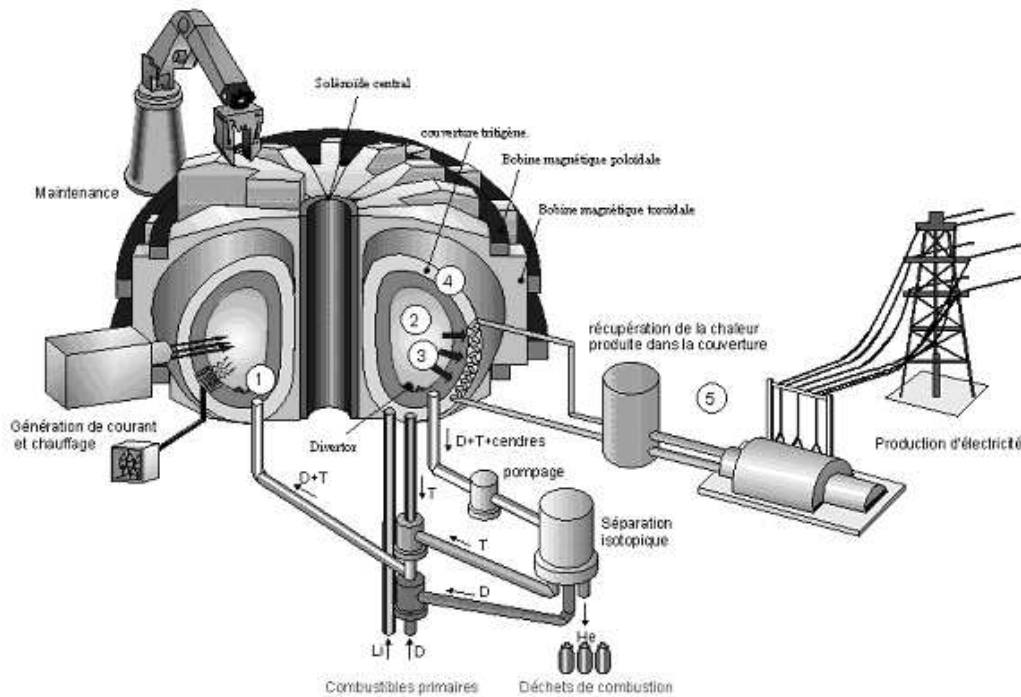


Figure 28: Schéma d'un réacteur à fusion (Figure fournie par M. G. Marbach-DRFC-CEA)

T se fait en utilisant l'isotope ${}^6\text{Li}$ (On peut montrer que dans un réacteur de fusion la réaction de fusion avec le ${}^7\text{Li}$ n'est pas assez favorable pour générer le T). Le Li peut être extrait de l'eau de mer à raison de 0.17 g/m^3 : le volume des eaux est de $1.37 \cdot 10^9 \text{ km}^3$!

Le schéma d'un réacteur basé sur la fusion thermonucléaire contrôlée par confinement magnétique, est montré sur la figure 28. Dans le coeur du réacteur se trouve un plasma où les réactions de fusion ont lieu. Entourant ce plasma, on trouve successivement une première paroi qui doit être "transparente" aux neutrons et supporter les radiations électromagnétiques émises du plasma, et ensuite le manteau contenant le Li. Ce manteau a pour rôle de convertir l'énergie cinétique des n en énergie thermique et permet également la régénération du T brûlé. La chaleur ainsi produite actionne alors une turbine électrique.

4.2 Critère de Lawson – Condition d'ignition

Supposons que nous ayons un plasma thermonucléaire, c'est à dire où des réactions de fusion ont lieu. Nous désirons avoir un bilan énergétique positif en tenant compte du schéma de circulation d'énergie de la figure 29.

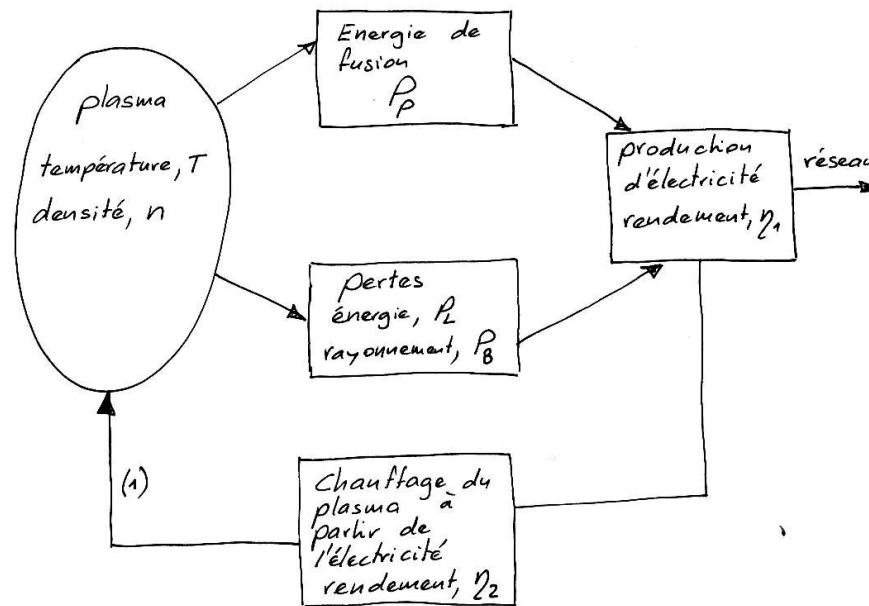


Figure 29: Bilan d'énergie dans un réacteur de fusion lorsque les particules α ne chauffent pas le plasma. Note: Lorsque le chauffage du plasma se fait uniquement à travers les particules α (ignition), la branche indiquée avec (1) dans la figure n'existe pas.

L'énergie thermique d'un plasma est perdue par différents moyens. Tout d'abord, il y a la perte par conduction de chaleur vers l'extérieur. Les particules sont également perdues. En appelant P_L la puissance perdue par unité de volume, on peut définir un **temps de confinement d'énergie** τ_E comme

$$\tau_E = \frac{W}{P_L} = \frac{3nk_B T}{P_L} \quad (90)$$

où $W = \frac{3}{2}nk_B(T_e + T_i)$ est l'énergie du plasma et dans (90) on a supposé que

$$T_e = T_i = T.$$

On définit donc le temps de confinement d'une manière phénoménologique. Les ions et les électrons sont supposés être à la même température T et n représente la densité des électrons du plasma.

Il y a également d'autres sources de perte d'énergie. L'une d'elle est le **rayonnement de freinage ou Bremsstrahlung**: un électron lors d'une collision avec un ion rayonne de l'énergie. Cependant aux températures des réacteurs de fusion, 10-20 keV, la puissance perdue par Bremsstrahlung est négligeable par rapport à la puissance délivrée par les α . La puissance perdue par unité de volume est

$$P_b = 1.5 \cdot 10^{-38} Z^2 n^2 \left(\frac{T}{e}\right)^{1/2} [W/m^3] \quad (91)$$

où T est la température en eV, Z le nombre de charge du ion, n la densité en m^3 .

Calculons maintenant **l'énergie produite par les réactions de fusion**. Nous appellerons n_D et n_T les densités de noyaux de D et de T. Les ions de D et de T sont distribués selon une fonction de distribution que nous prendrons comme maxwellienne avec la même température T:

$$f_D = n_D \left(\frac{m_D}{2\pi k_B T}\right)^{3/2} \exp\left\{-\frac{m_D v_D^2}{2k_B T}\right\} \quad (92)$$

$$f_T = n_T \left(\frac{m_T}{2\pi k_B T}\right)^{3/2} \exp\left\{-\frac{m_T v_T^2}{2k_B T}\right\} \quad (93)$$

Par unité de volume, le taux de réaction entre des noyaux de D et T ayant les vitesses respectives \mathbf{v}_D et \mathbf{v}_T est:

$$r(\mathbf{v}_D, \mathbf{v}_T) = \sigma(\|\mathbf{v}_D - \mathbf{v}_T\|) \|\mathbf{v}_D - \mathbf{v}_T\| f_D(\mathbf{v}_D) f_T(\mathbf{v}_T) \quad (94)$$

où $\sigma(v)$ est la section efficace de la réaction. Le nombre total de réactions par unité de volume et par unité de temps est alors:

$$r_{tot} = \int d^3\mathbf{v}_D d^3\mathbf{v}_T \sigma(\|\mathbf{v}_D - \mathbf{v}_T\|) \|\mathbf{v}_D - \mathbf{v}_T\| f_D(\mathbf{v}_D) f_T(\mathbf{v}_T) \quad (95)$$

L'expression (95) se simplifie si on utilise les définitions suivantes:

$$\mathbf{V} = \frac{\mathbf{v}_D + \mathbf{v}_T}{2}, \quad M = \frac{m_D m_T}{m_D + m_T} \quad (96)$$

$$\mathbf{V}' = \mathbf{v}_D - \mathbf{v}_T \quad (97)$$

Nous avons alors:

$$\begin{aligned} r_{tot} &= n_D n_T \frac{(m_D m_T)^{3/2}}{(2\pi k_B T)^3} \int d^3 V' d^3 V \sigma(V') V' \quad (98) \\ &= n_D n_T \exp \left\{ -\frac{M V'^2}{2k_B T} \right\} \exp \left\{ -\frac{m_D + m_T}{2k_B T} \left(\mathbf{V} + \frac{1}{2} \frac{m_D - m_T}{m_D + m_T} \mathbf{V}' \right)^2 \right\} \end{aligned}$$

L'intégration sur \mathbf{V} peut être faite:

$$r_{tot} = 4\pi n_D n_T \left(\frac{M}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} \int dV' \sigma(V') V'^3 \exp \left\{ -\frac{M V'^2}{2k_B T} \right\} \quad (99)$$

On peut interpréter

$$4\pi \left(\frac{M}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} \int dV' \sigma(V') V'^3 \exp \left\{ -\frac{M V'^2}{2k_B T} \right\} \quad (100)$$

comme la moyenne $\langle \sigma V \rangle$ de $\sigma(V') V'$ pour des fonctions de distribution maxwelliennes. Le nombre de réaction r_{tot} par unité de volume et par unité de temps est:

$$r_{tot} = n_D n_T \langle \sigma V \rangle [m^{-3} s^{-1}] \quad (101)$$

où $\langle \sigma V \rangle$ est une fonction de T dont sa variation (en fonction de T) est donnée sur la figure 30.

La puissance de fusion P_P produite par unité de volume par les réaction de fusion est égale à

$$P_P = r_{tot} W_f = n_D n_T \langle \sigma V \rangle W_f \quad (102)$$

W_f est l'énergie totale libérée par toutes les réactions de fusion. Pour la réaction D-T, 17.6 MeV sont produits auxquels nous rajoutons 4.8 MeV produits par la réaction Li-n qui régénère le T. W_f est alors 22.4 MeV (Notez que l'on utilise le maximum de l'énergie produite!).

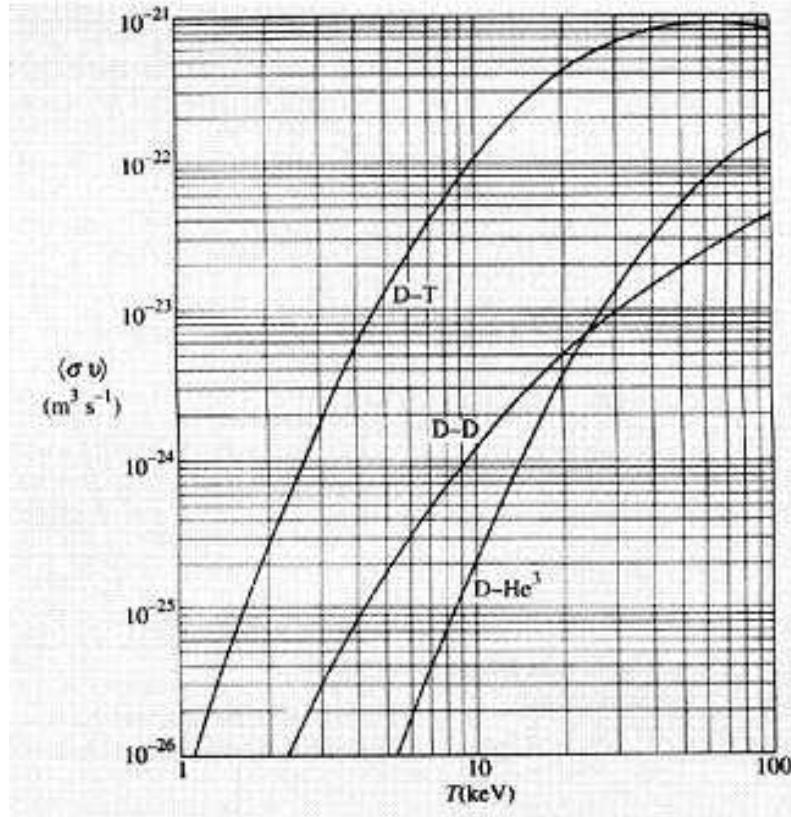


Figure 30: Variation de $\langle \sigma v \rangle$ en fonction de T . (Tirée de "Tokamaks" de J. Wesson)

Nous supposons avoir un mélange de 50% de D et 50% de T (i.e. $n_D = n_T = \frac{n}{2}$ où n est la densité du plasma)

$$P_P = \frac{n^2}{4} \langle \sigma v \rangle W_f \quad (103)$$

Il est maintenant nécessaire de reconsidérer le rendement énergétique du système entier. On admet que la conversion énergie thermique en énergie électrique se fait avec un rendement η_1 et que le chauffage du plasma par cette énergie électrique a une efficacité η_2 . L'efficacité totale du système est alors $\eta = \eta_1 \eta_2$. Notez que dans ce bilan d'énergie on ne tient pas compte de l'énergie électrique nécessaire pour faire fonctionner la centrale! C'est de nouveau une approximation optimiste. On admet que

$$\eta = 30\%. \quad (104)$$

Cette valeur est typique d'un cycle thermique (cf. cycle de Carnot).

Le bilan énergétique est alors:

$$\begin{aligned}
Perte &= Production \\
P_L + P_B &= \eta[P_L + P_B + P_P] \\
(1 - \eta)(P_L + P_B) &= \eta P_P \\
P_L + P_B &= \frac{\eta}{1 - \eta} \frac{\langle \sigma V \rangle}{4} W_f n^2
\end{aligned} \tag{105}$$

En utilisant les expressions respectives de P_L et P_B , (90) et (91), il vient:

$$\frac{3nk_B T}{\tau_E} + An^2 T^{1/2} = \frac{\eta}{1 - \eta} \frac{\langle \sigma V \rangle}{4} W_f n^2 \tag{106}$$

On peut transformer cette expression de la manière suivante:

$$\begin{aligned}
n\tau_E \left[-AT^{1/2} + \frac{\eta}{1 - \eta} \frac{\langle \sigma V \rangle}{4} W_f \right] &= 3k_B T \\
n\tau_E &= \frac{3k_B T}{\frac{\eta}{1 - \eta} \frac{\langle \sigma V \rangle}{4} W_f - AT^{1/2}}
\end{aligned} \tag{107}$$

A est égal à $1.5 \cdot 10^{-38} Z^2 e^{-1/2}$.

Il faut remarquer que dans l'équation (107) le terme de droite est une fonction qui dépend uniquement de la température du plasma. Les valeurs de $n\tau_E$ sont données par la figure 31. On remarque que, pour le D-T, τ_E est minimum pour $T = 20 \text{ keV}$ et vaut:

$$n\tau_E = 5 \cdot 10^{19} \text{ m}^{-3} \text{ s} \tag{108}$$

La relation (107) ou (108), connue sous le nom de **critère de Lawson**, indique que pour un bilan d'énergie positif il faut que le produit de la densité et du temps de confinement τ_E excède une certaine valeur et ceci à la température correspondante. En fait il faut que l'on ait les 3 quantités (n, T, τ_E) simultanément.

Dans la dérivation du critère de Lawson, l'énergie de chauffage du plasma est fournie par l'énergie électrique. Les **particules** α produites par la réaction ne sont pas confinées. Si les particules α sont confinées, elles contribuent au chauffage du plasma et permettent de supprimer l'apport d'énergie extérieure.

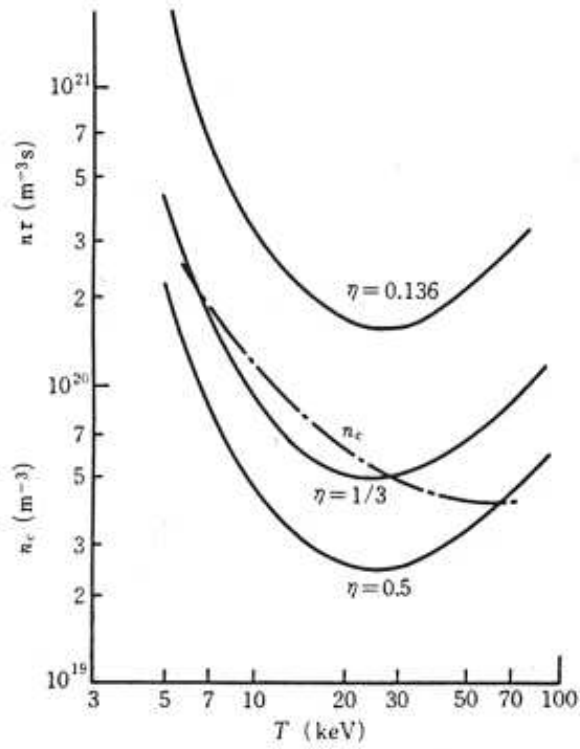


Figure 31: Variation de $n\tau_E$ en fonction de la température du plasma pour la condition de Lawson ($\eta = 1/3 = 33\%$) et d'ignition ($\eta = 0.136$). (Tiré de "Plasma Physics for nuclear fusion" de Miyamoto)

Cette situation est appelée **ignition**; comme dans le cas d'une allumette qui, une fois embrasée, continue à brûler sans apport d'énergie externe.

La puissance par unité de volume portée par les particules α est:

$$P_\alpha = \frac{\langle \sigma v \rangle n^2}{4} W_\alpha \quad (109)$$

où W_α est égal à 3.52 MeV. Le bilan d'énergie est alors:

$$P_b + P_L = P_\alpha \quad (110)$$

soit

$$An^2T^{1/2} + \frac{3nk_B T}{\tau_E} = \frac{\langle \sigma v \rangle}{4} n^2 W_\alpha \quad (111)$$

En comparant les équations (111) et (106) on voit que l'ignition est équivalente à la condition de Lawson avec un rendement η' donné par

$$\frac{\eta'}{1 - \eta'} = \frac{W_\alpha}{W_f} \quad (112)$$

soit $\eta' = 0.136$. La figure 31 montre alors que $n\tau_E$ doit être supérieur à $5 \cdot 10^{20} m^{-3}s$ pour arriver à l'ignition. La température correspondante est environ 20 keV.

4.3 Confinement magnétique

Le plasma d'un réacteur de fusion doit satisfaire les conditions suivantes:

- le produit $n\tau_E$ doit être supérieur à $5 \cdot 10^{20} m^{-3}s$ (condition d'ignition);
- la température ionique doit être proche de 10 keV

Plutôt que d'employer des diagrammes $n\tau_E$ en fonction de T_i il est alors plus commode d'employer un diagramme $n\tau_E T_i$ ("triple produit") en fonction de T_i (c.f. exercice et voir figure 32).

On voit que le régime des réactions correspond à $n\tau_E T_i$ supérieur à $50 \cdot 10^{20} [m^{-3}s keV]$ pour T_i proche de 10 keV.

Le confinement magnétique est la branche de la fusion qui étudie les diverses méthodes pour atteindre ce régime en confinant le plasma par des champs magnétiques et en le chauffant. Les deux structures magnétiques les plus importantes sont le **Tokamak** et le **Stellarator**. Toutes deux sont des **structures magnétiques toroïdales**: le plasma a une forme toroïdale et est confiné par des champs magnétiques créés par des bobines et dans le cas du Tokamak (du russe Toroidal Kamera Maknetik) par un courant circulant dans le plasma lui-même. On se réfère à la qualité d'un confinement magnétique par le rapport β :

$$\beta = \frac{\text{Pression thermique du plasma}}{\text{Pression magnétique}} = \frac{nk_B T}{B^2/2\mu_0} \quad (113)$$

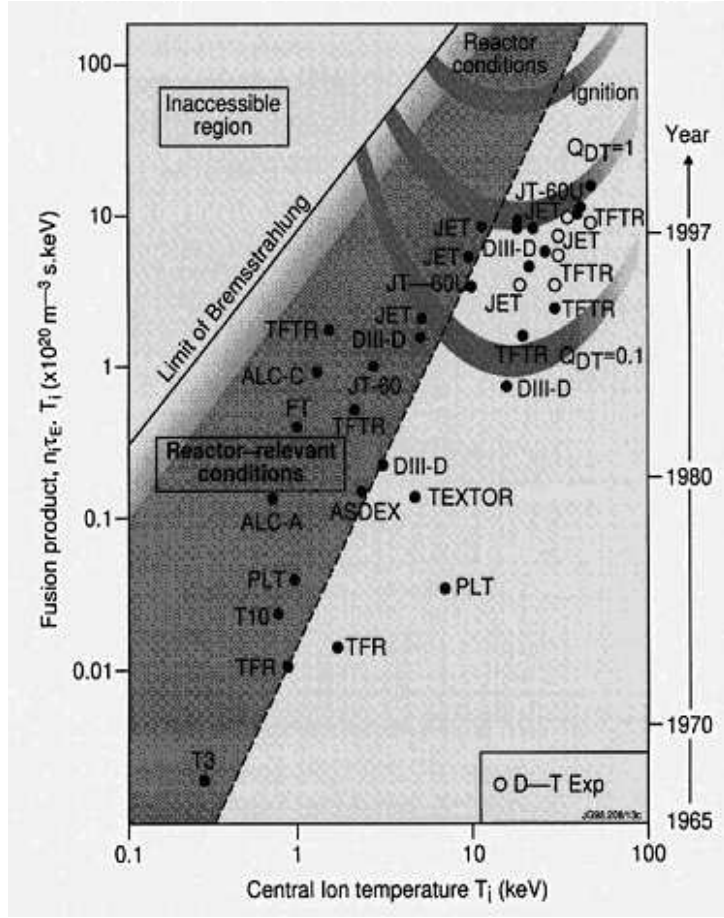


Figure 32: Variation du Triple produit de fusion $n\tau_E T_i$ de diverses machines en fonction de la température ionique T_i

Nous avons supposé dans l'expression de β , (433), que les ions et les électrons ont la même température T ($T_e = T_i = T$). La pression thermique d'un plasma de fusion est de quelques atmosphères (c.f. exercice). $B^2/2\mu_0$ représente la **pression magnétique**: une première justification peut être vue si l'on fait une analyse dimensionnelle de cette quantité. D'une manière plus approfondie, $B^2/2\mu_0$ est une pression magnétique car la densité de force de Lorentz ($\mathbf{j} \wedge \mathbf{B}$) peut être exprimée en fonction du gradient de $B^2/2\mu_0$ dans le cadre de la MagnétoHydroDynamique (MHD)¹⁰.

¹⁰On verra dans un chapitre ultérieur que l'équilibre local dans un plasma confiné magnétiquement s'écrit comme:

$$\nabla p = \mathbf{J} \wedge \mathbf{B} \quad (114)$$

où p , \mathbf{J} et \mathbf{B} sont respectivement la pression, la densité de courant et le champ magnétique.

Plus le β est élevé, plus la pression du plasma que l'on peut confiner est élevée (c.à.d le plasma n'a pas seulement une haute température mais aussi une haute densité) pour un champ magnétique donné. Les valeurs de β sont limitées par des **critères de stabilité MHD** et sont inférieures à 10% dans les machines à fusion.

Les éléments du Tokamak sont montrés sur la figure 33. Un ensemble de bobines génèrent un fort champ magnétique toroïdal \mathbf{B}_T . Le plasma porte également un courant toroïdal I_T , qui génère un champ magnétique poloïdal \mathbf{B}_{pol} . Dans le cas du réacteur ITER (International Thermonuclear Experimental Reactor <http://www.iter.org/>), qui est en cours de construction, B_T et I_T sont respectivement de 5.3 T et 15 MA. C'est l'ensemble des deux champs magnétiques \mathbf{B}_T et \mathbf{B}_{pol} qui confine le plasma. Le courant toroïdal dans le plasma est induit comme dans un transformateur dont le plasma formerait l'enroulement secondaire à un seul tour (ce courant induit requiert des schémas spéciaux, appelés génération de courant non-inductive, pour le maintenir si l'on désire un réacteur à fusion opérant en continu). Une justification de la nécessité d'un champ autre qu'un simple champ toroïdal sera présentée lors de l'étude des trajectoires des particules chargées dans des champs magnétiques statiques (cf. chapitre sur le mouvement des particules).

Dans un tokamak, il est également nécessaire pour des raisons de confinement, d'avoir également un champ magnétique vertical. Le tokamak représente actuellement la filière qui a donné les meilleures performances. A la fin de l'année 1991, dans la machine européenne JET (Joint European Torus), un mélange de D et de T ($n_T/(n_D + n_T) = 11\%$) a été introduit dans le tore. La densité électronique moyenne n_e était de $1.1 \cdot 10^{20} \text{ m}^{-3}$, et la température ionique au centre du plasma de 18.8 keV. Un flux de neutrons de $6 \cdot 10^{17}$ neutrons/s était émis avec une production totale de $7.2 \cdot 10^{17}$ neutrons. Le temps de confinement de l'énergie était 0.9 s et le triple produit $n\tau_E T_i = 3.8 \cdot 10^{20} \text{ m}^{-3} \text{ keVs}$. Pour produire le flux de neutrons, la puissance de chauffage additionnel (fournie par l'injection de particules neutres énergétiques) atteignait jusqu'à 14 MW. Plus récemment en 1997 des expériences avec un mélange de 50% de D et 50% de T ont été réalisées dans JET permettant d'obtenir des valeurs records de puissance de fusion et de

Dans un plasma confiné gravitationnellement (étoiles) l'équilibre local, avec une symétrie sphérique, s'écrit comme:

$$\nabla p = \rho_m g(r) = -\rho_m \frac{GM}{r^2} \mathbf{e}_r \quad (115)$$

avec $M = 4\pi \int_0^r \rho_m(r') r'^2 dr'$ et $\rho_m = \rho_m(r)$ la densité de masse locale.

rapport Q entre la puissance de fusion et la puissance de chauffage externe. Une puissance de fusion de 16.1 MW durant 0.85 s a été obtenue. Un Q de 0.6-0.7 a été atteint.

La machine ITER (<http://www.iter.org/>) est un projet mondial formé actuellement de sept partenaires (Union Européenne + Suisse, Japon, Fédération de Russie, U. S. A., Chine, Corée du Sud et Inde) qui vise à construire un réacteur de fusion expérimental pour le début du XXIème siècle. Les paramètres typiques d'ITER¹¹ sont: une densité moyenne de $1.5 \cdot 10^{20} m^{-3}$, un temps de confinement d'énergie τ_E de 3.5s et un triple produit $n\tau_E\langle T \rangle$ de $44 \cdot 10^{20} m^{-3}keV s$. La température moyenne $\langle T \rangle$ est définie comme $0.5 \cdot [\langle T_e \rangle + \langle T_i \rangle]$ et est égale à 8.5 keV. La puissance de fusion estimée est de 500 MW durant plus de 500 s avec un facteur d'amplification

$$Q = \frac{P_{fusion}}{P_{additionnel}} = 10, \quad (116)$$

où P_{fusion} est la puissance thermique de fusion et $P_{additionnel}$ est la puissance de chauffage additionnelle nécessaire pour atteindre les paramètres (n, τ_E, T) . ITER est actuellement en construction sur le site de Cadarache en France (Provence). Une vue d'ITER est présentée sur la figure 34. Le temps de construction d'ITER est approximativement de 10ans avec un premier plasma prévu en 2018. La durée d'exploitation est du même ordre de grandeur. La Suisse fait partie du projet ITER à travers son appartenance au programme Euratom de l'UE.

ITER étant toujours considéré un réacteur expérimental, la communauté internationale est actuellement en train de concevoir la suite de ITER qui consistera en un tokamak, DEMO, qui pourra démontrer la faisabilité économique d'un réacteur à fusion thermonucléaire par confinement magnétique.

Un autre schéma de confinement magnétique est celui du **Stellarator**. Le plasma est confiné par une structure de champ magnétique créé uniquement par des bobines extérieures: **Il n'est pas indispensable - comme dans le cas du Tokamak - d'avoir un courant dans le plasma** qui génère le champ magnétique nécessaire au confinement du plasma. La topologie magnétique et la configuration des bobines est alors également beaucoup plus complexe. Le plasma étant confiné seulement par des champs magnétiques créés par des bobines extérieures, les problèmes - associés à la génération

¹¹Pour plus de détails consulter la référence: B.J. Green, ITER: burning plasma physics experiment, Plasma Phys. Control. Fusion **45** (2003) 687-706.

inductive du courant liés au concept du Tokamak - sont évités. La figure 35 représente la forme du plasma dans les bobines magnétiques du projet de Stellarator allemand W7-X. On note la nature réellement tri-dimensionnelle du plasma et des bobines. Au cours des années de recherche, d'autres configurations de machine ont été essayées, comme les miroirs (cf. chapitre sur le mouvement des particules) et les pinchs. Leurs performances n'ont pas justifié la poursuite de l'étude de ces configurations.

Signalons également les travaux (longtemps classifiés) qui se font sur le **confinement inertiel** visant à réaliser un bilan d'énergie positif à travers de micro-explosions thermonucléaires. Cette voie est principalement liée au développement d'armes thermonucléaires.

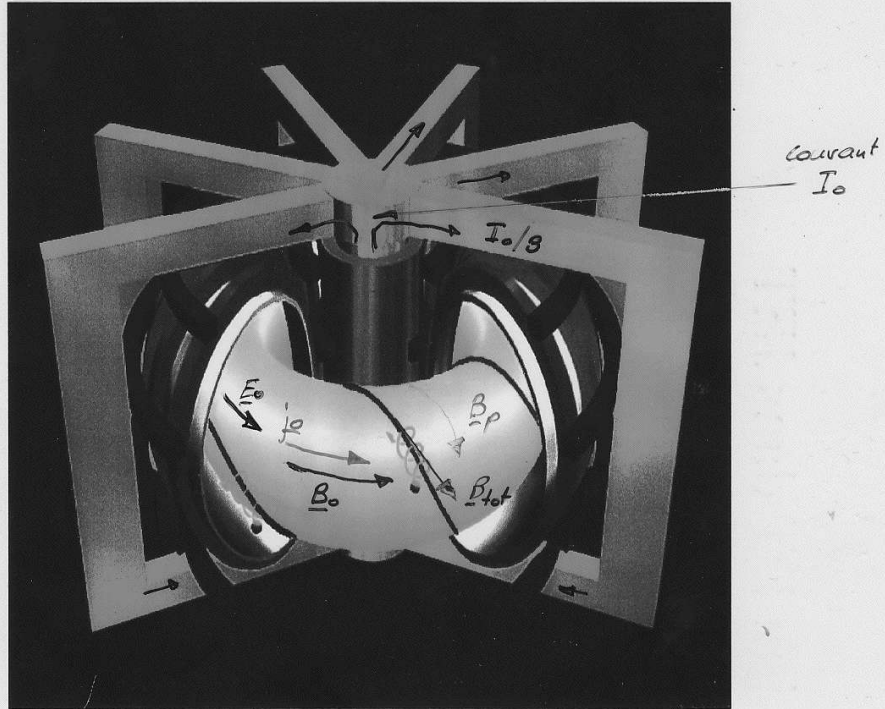
Lecture recommandée:

"L'énergie des étoiles" par P.H. Rebut chez Odile Jacob

"La fusion nucléaire" par Joseph Weisse Collection "Que sais-je?" n° 3659 (PUF)

"ITER, Le chemin des étoiles ?" par R. Arnoux et J. Jacquinot, chez Edisud (2006), ISBN 2-7449-0615-8, www.edisud.com

Schéma du Tokamak



$I_0 \Rightarrow B_0 = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r}$ champ magn. toroidal \underline{B}_0

j_0 (toroidal) : densité de courant dans le plasma
génère de manière inductive $j_0 = \frac{E_0}{2(r)}$

$j_0 \Rightarrow$ champ magn. poloidal \underline{B}_p

↑
résistivité

$\underline{B}_{tot} = \underline{B}_0(r) + \underline{B}_p(r)$: lignes de champ
hélicoïdales

Tokamak TCV

$|B_0| \simeq 1.5 T$

$I_{plasma} = \int j_0 \cdot dS \leq 1 MA$

Tokamak ITER

$|B_0| = 5.7 T$

$I_{pl} = 24 MA$

Figure 33: Schéma de concept d'un tokamak

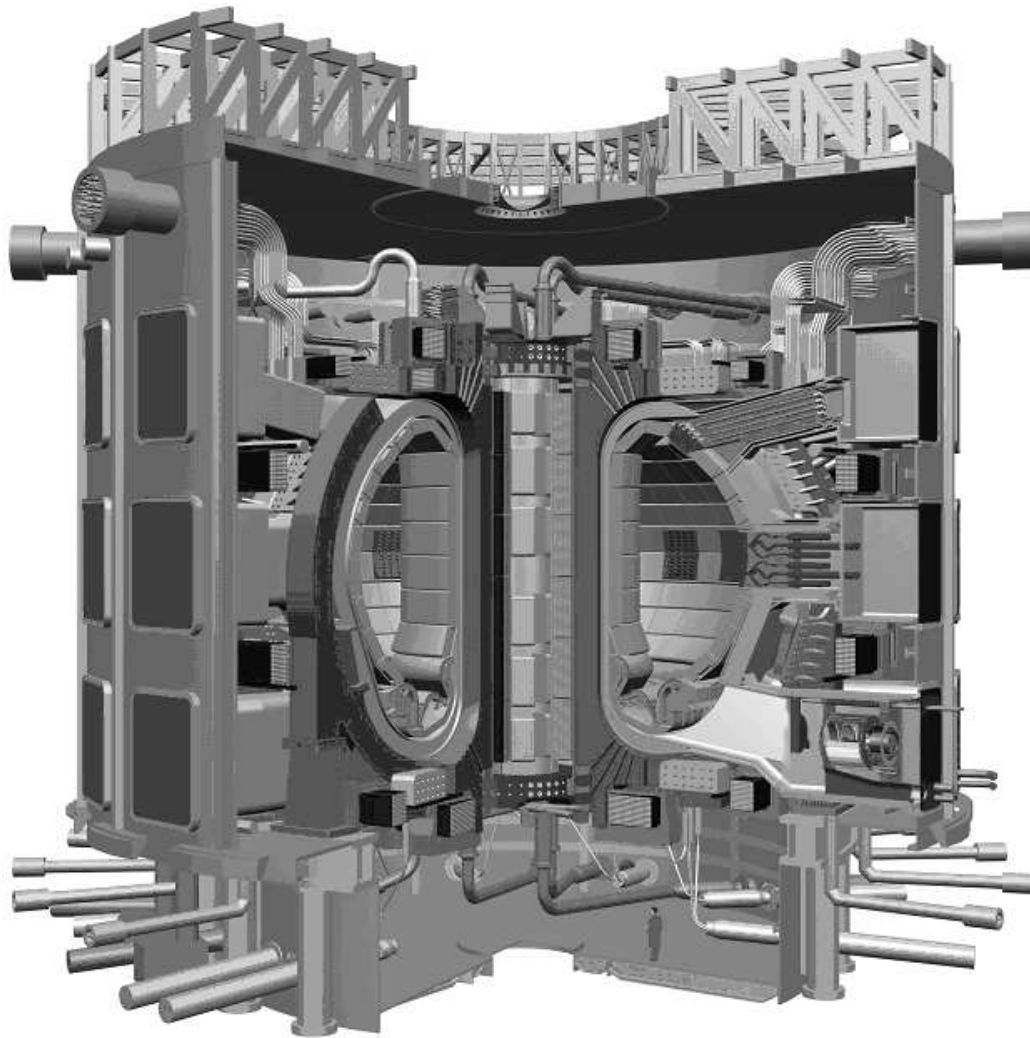
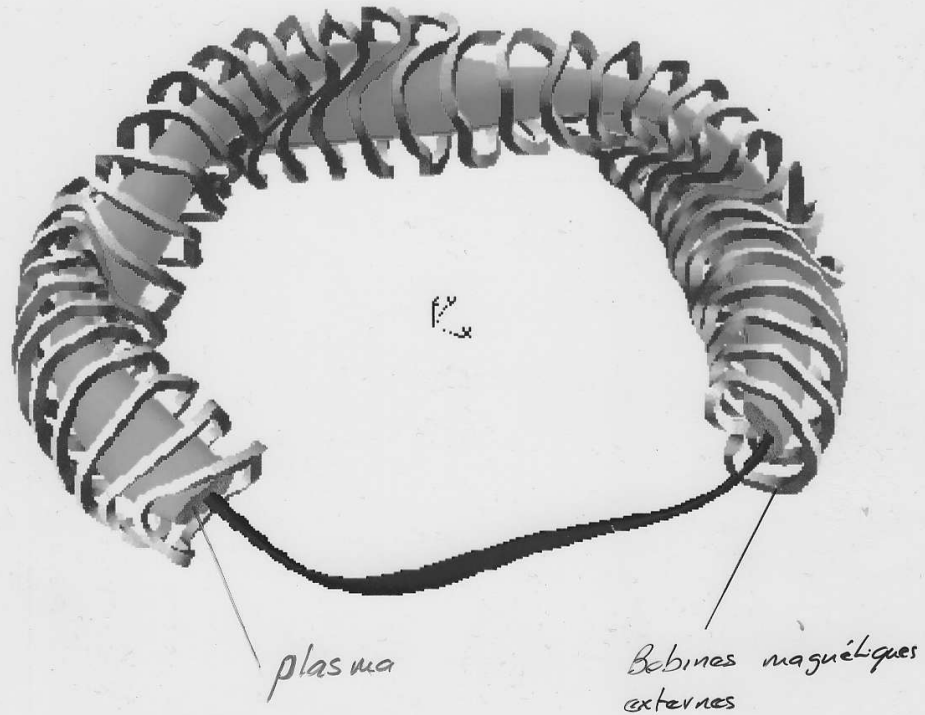


Figure 34: Schéma de concept d'ITER. Remarquez la taille d'un homme "standard".

W7-X en construction en Allemagne



Stellarateur

(pas de courant "toroidal" dans le plasma)

Le champ poloidal est créé par les bobines externes

$$\underline{B}_{\text{tot}}(r) = \underline{b}_0(r) + B_{\text{pol}}(r)$$

↑ ce champ est créé par des bobine ext. pas par comme ds. un Tokamak

Figure 35: Schéma du Stellarator W-7-X, montrant la structure tridimensionnelle des bobines qui crée le champ magnétique et celle du plasma.

5 Mouvement d'une particule dans des champs électriques et magnétiques

Le plasma étant constitué de particules chargées, il est primordial de connaître leurs mouvements dans diverses configurations de champs électriques et magnétiques, statiques ou oscillatoires. En principe, il suffit de résoudre l'équation de Newton. Nous allons dériver quelques propriétés des trajectoires de particules. Là où les calculs ne sont pas trop compliqués, nous utiliserons les équations du mouvement relativistes:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = q[\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)] \quad (117)$$

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{v} = \frac{\mathbf{p}}{\gamma m} \quad (118)$$

$$\gamma = \frac{1}{(1 - \frac{v^2}{c^2})^{1/2}} = (1 + \frac{p^2}{m^2 c^2})^{1/2} \quad (119)$$

m est la masse au repos de la particule. Dans le cas général, l'équation (230) est non-linéaire si les champs \mathbf{E} ou \mathbf{B} dépendent de la position instantanée, \mathbf{x} , de la particule.

5.1 Mouvement d'une particule dans un champ électrique constant \mathbf{E}_0 ($\mathbf{B}_0 = 0$)

L'équation du mouvement est:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = q \mathbf{E}_0 \quad (120)$$

dont l'intégration est immédiate:

$$\mathbf{p} = q\mathbf{E}_0 t \quad (121)$$

On voit que la vitesse \mathbf{v} a pour limite la valeur c .

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{p}}{\gamma m} = \frac{q\mathbf{E}_0 t}{m[1 + \frac{(q\mathbf{E}_0 t)^2}{m^2 c^2}]^{1/2}}$$

Pour $t \rightarrow \infty$ on trouve que $v \rightarrow c$, on retrouve le résultat bien connu que la vitesse d'une particule ne peut pas dépasser la vitesse de la lumière.

5.2 Mouvement d'une particule dans un champ magnétique constant \mathbf{B}_0 ($\mathbf{E}_0 = 0$)

L'équation du mouvement est:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = q[\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}_0] \quad (122)$$

L'énergie γ est conservée car la force de Lorentz est perpendiculaire à \mathbf{v} .

L'équation (122) se ramène alors à:

$$\begin{aligned} \gamma m \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= q[\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}_0] \\ \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= \mathbf{v} \wedge \frac{q}{\gamma m} \mathbf{B}_0 = \mathbf{v} \wedge \Omega_c \end{aligned} \quad (123)$$

où

$$\Omega_c = \frac{q}{\gamma m} \mathbf{B}_0 = \frac{q|B_0|}{\gamma m} \frac{\mathbf{B}_0}{|B_0|} = \Omega_c \mathbf{e}_B, \quad (124)$$

avec \mathbf{e}_B étant un vecteur unitaire dans la direction de \mathbf{B}_0 . Ω_c est la fréquence angulaire cyclotron relativiste de la particule concernée. Afin de pouvoir écrire des équations valables aussi bien pour les ions que pour les électrons on définit

$$\bar{\Omega}_c = -\frac{q}{m} B \quad (125)$$

est un nombre algébrique: $\bar{\Omega}_c$ est positif pour les électrons et négatif pour les ions.

La fréquence cyclotronique, f_c est:

$$f_c = \frac{|\Omega_c|}{2\pi}, \quad (126)$$

et pour des électrons non-relativistes ($\gamma = 1$) on a $f_c = 28[\text{GHz/T}]$.

L'équation (123) montre que, selon la direction parallèle à Ω_c , il n'y a pas de force: **le long du champ \mathbf{B}_0 le mouvement est uniforme.** La conservation de l'énergie implique que la magnitude de la composante de \mathbf{p} (ou de \mathbf{v}) perpendiculaire à \mathbf{B}_0 est également une constante

$$\frac{\|p_\perp\|}{\gamma m} = \|v_\perp\| = \text{constante} \quad (127)$$

Choisissons \mathbf{B}_0 selon l'axe Oz. Dans le plan Oxy on a:

$$\frac{dv_x}{dt} = -\bar{\Omega}_c v_y \quad (128)$$

$$\frac{dv_y}{dt} = \bar{\Omega}_c v_x \quad (129)$$

Les équations (128) et (129) admettent comme solutions:

$$\frac{dx}{dt} = v_x = v_\perp \cos(\bar{\Omega}_c t + \phi) \quad (130)$$

$$\frac{dy}{dt} = v_y = v_\perp \sin(\bar{\Omega}_c t + \phi) \quad (131)$$

L'intégration des équations (130) et (131) en tenant compte des conditions initiales donne:

$$x(t) = x_0 + \int_0^t v_x(t') dt' = x_0 - \frac{v_\perp}{\bar{\Omega}_c} \sin \phi + \frac{v_\perp}{\bar{\Omega}_c} \sin(\bar{\Omega}_c t + \phi) \quad (132)$$

$$y(t) = y_0 + \int_0^t v_y(t') dt' = y_0 + \frac{v_\perp}{\bar{\Omega}_c} \cos \phi - \frac{v_\perp}{\bar{\Omega}_c} \cos(\bar{\Omega}_c t + \phi) \quad (133)$$

En définissant l'angle $\alpha = \phi - \pi/2$ on peut récrire ces équations sous une forme plus convenable:

$$x(t) = X_g + r_L \cos(\bar{\Omega}_c t + \alpha) \quad (134)$$

$$y(t) = Y_g + r_L \sin(\bar{\Omega}_c t + \alpha) \quad (135)$$

avec:

$$X_g = x_0 - r_L \cos \alpha \quad (136)$$

$$Y_g = y_0 - r_L \sin \alpha \quad (137)$$

Comme montré dans la figure 36, la particule décrit dans le plan Oxy un mouvement circulaire. Si q est positif, le sens de rotation est celui des aiguilles d'une montre et si q est négatif il est opposé à celui des aiguilles d'une montre (sens trigonométrique). Le centre des orbites de giration des particules est appelé **centre de guidage** (en anglais "guiding center" ou encore "gyro-center") et est défini par le vecteur $\mathbf{x}_g = (X_g, Y_g)$. La quantité $v_\perp/|\Omega_c|$ est le rayon de Larmor r_L .

$$r_L = \text{Rayon de Larmor} = \frac{v_\perp}{|\Omega_c|} \quad (138)$$

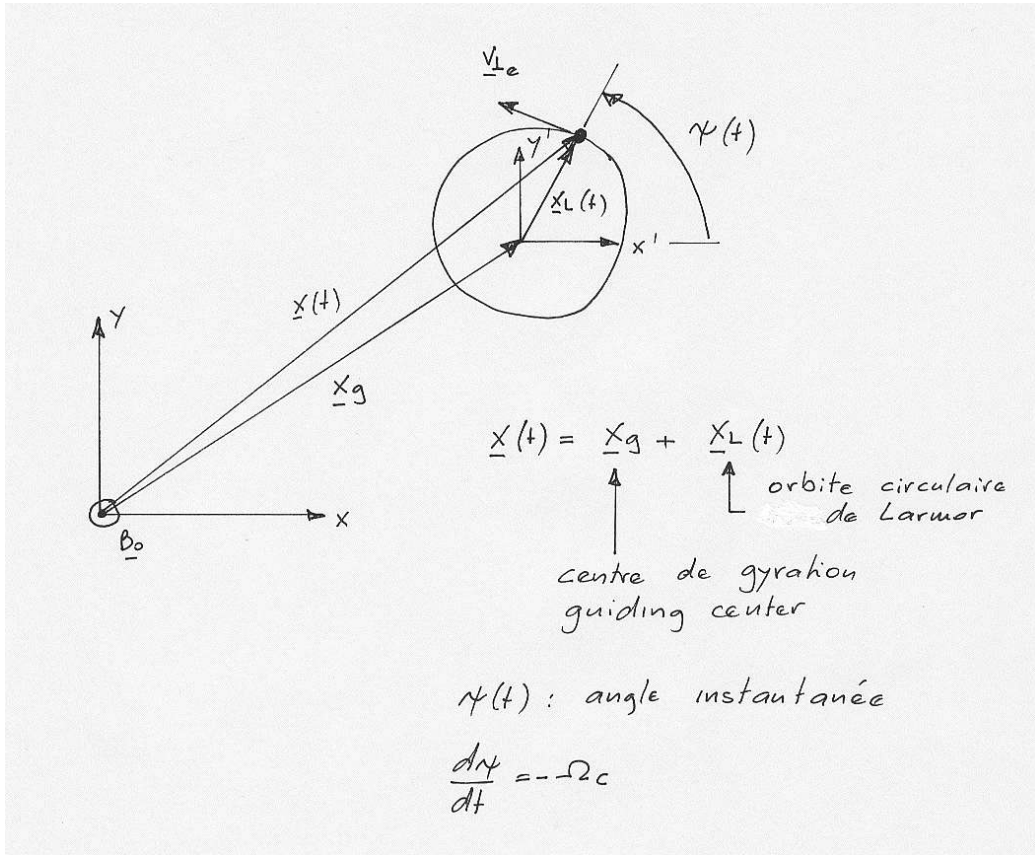


Figure 36: Mouvement cyclotronique d'une particule chargée dans un champ magnétique \mathbf{B}_0 constant.

L'angle $\Psi(t) = \bar{\Omega}_c t + \alpha$ indiqué sur la figure est l'angle instantané de rotation (dessiné pour un électron).

En conclusion dans un champ magnétique uniforme \mathbf{B}_0 le mouvement d'une particule dans le plan perpendiculaire à \mathbf{B}_0 est circulaire. La composante v_{\parallel} de \mathbf{v} parallèle à \mathbf{B}_0 n'est pas affectée. Si v_{\parallel} est constant, alors le mouvement de la particule est une hélice.

5.2.1 Diamagnétisme

Comme il est illustré dans la figure 37, l'orbite circulaire des électrons et des ions peut être assimilée à une petite spire de courant qui génère un champ magnétique dipolaire.

Le courant microscopique généré par chaque charge vaut:

$$I_L = qf_c = q \frac{\Omega_c}{2\pi} = \frac{q^2 B_c}{m_0}. \quad (139)$$

A ce courant microscopique on associe un moment magnétique $\mu = S * I_L$, où $S = \pi r_L^2$ est la surface de la "spire" de courant de rayon égal au rayon de Larmor. Le champ magnétique généré par ce microcourant est déterminé par la loi d'Ampère et est opposé au champ magnétique externe \mathbf{B}_0 pour les deux espèces: ions et électrons. La réponse des particules chargées qui composent le plasma est telle que le **plasma** se comporte comme **un milieu diamagnétique**.

Vectoriellement le moment magnétique de chaque particule s'écrit comme:

$$\mu = \frac{1}{2} q \mathbf{r}_L \wedge \mathbf{v}_\perp = -\frac{\frac{1}{2} m v_\perp^2}{B} \mathbf{e}_B = -\frac{\frac{1}{2} m v_\perp^2}{B} \frac{\mathbf{B}}{B} \quad (140)$$

où le signe - indique que l'orientation du moment dipolaire est opposée au champ externe.

Calculons maintenant dans un plasma l'intensité d'aimantation macroscopique \mathbf{M} résultant de l'ensemble des moments magnétiques orbitaux des particules individuelles. En désignant par n_e, n_i les densités, par T_e, T_i les températures électroniques et ioniques on obtient:

$$\mathbf{M} = -\frac{M}{B} \mathbf{B} \quad (141)$$

avec

$$M = \sum_{e,i} \frac{\frac{1}{2} m v_\perp^2}{B}$$

et pour chaque particule on a:

$$\langle \frac{1}{2} m v_\perp^2 \rangle = \langle \frac{1}{2} m v_x^2 \rangle + \langle \frac{1}{2} m v_y^2 \rangle = k_B T \quad (142)$$

d'où le résultat final:

$$M = \frac{n_e k_B T_e + n_i k_B T_i}{B} \quad (143)$$

ce qu'on écrit souvent en supposant $T_e = T_i$ et en posant $n = (n_e + n_i)$:

$$\mathbf{M} = -\frac{n k_B T}{B} \mathbf{B} \quad (144)$$

Comme dans tout milieu magnétique, il existe un courant de magnétisation, $\mathbf{J}_M = \nabla \wedge \mathbf{M}$. Ce courant est nul dans un plasma uniforme. Par contre dans un milieu inhomogène ce courant est non-nul et il existe dans les régions présentant des gradients, par exemple au bord d'un plasma homogène limité (de taille finie) où si le grandeurs telles que la densité, la température où le champ magnétique sont inhomogènes.

En considérant les courants libres et les courants liés¹² qui peuvent exister dans le plasma, la loi d'Ampère s'écrit alors:

$$\frac{\nabla \wedge \mathbf{B}}{\mu_0} = \mathbf{J}_L + \mathbf{J}_M = \mathbf{J}_L + \nabla \wedge \mathbf{M} \quad (145)$$

Le champ magnétique \mathbf{B} dans le plasma est donc obtenu à partir du champ appliqué $\mathbf{B}_0 = \mu_0 \mathbf{H}$ qui existerait en l'absence de plasma par la relation:

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}) = \mathbf{B}_0 + \mu_0 \mathbf{M} = \mathbf{B}_0 - \mu_0 \frac{nk_B T}{B^2} \mathbf{B} \\ &= \mathbf{B}_0 - \frac{1}{2} \frac{p}{\frac{B^2}{2\mu_0}} \mathbf{B} = \mathbf{B}_0 - \frac{1}{2} \beta \mathbf{B} \end{aligned} \quad (146)$$

où on a utilisé le paramètre β introduit au chapitre précédent qui est le rapport entre la pression cinétique $p = nk_B T$ et la pression magnétique $p_{magn} = \frac{B^2}{2\mu_0}$.

A partir de l'équation (146) il vient que:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 \mathbf{H}}{(1 + \beta/2)} = \frac{\mathbf{B}_0}{(1 + \beta/2)} \quad (147)$$

ce qui montre que l'amplitude du champ magnétique dans le plasma est plus petite que l'amplitude du champ appliqué $\mathbf{B}_0 = \mu_0 \mathbf{H}$. On en conclut donc que le plasma est un milieu diamagnétique.

¹²Il est important de remarquer que dans un plasma la densité de courant \mathbf{J} est une somme de deux contributions, le courants libres, \mathbf{J}_L , c.à d. dûs aux mouvements des centres de guidage et les courants liés, \mathbf{J}_M , dûs aux mouvements de rotations des particules chargées autour des centres de guidage. Les courants liés sont identiquement nuls dans un plasma homogène.

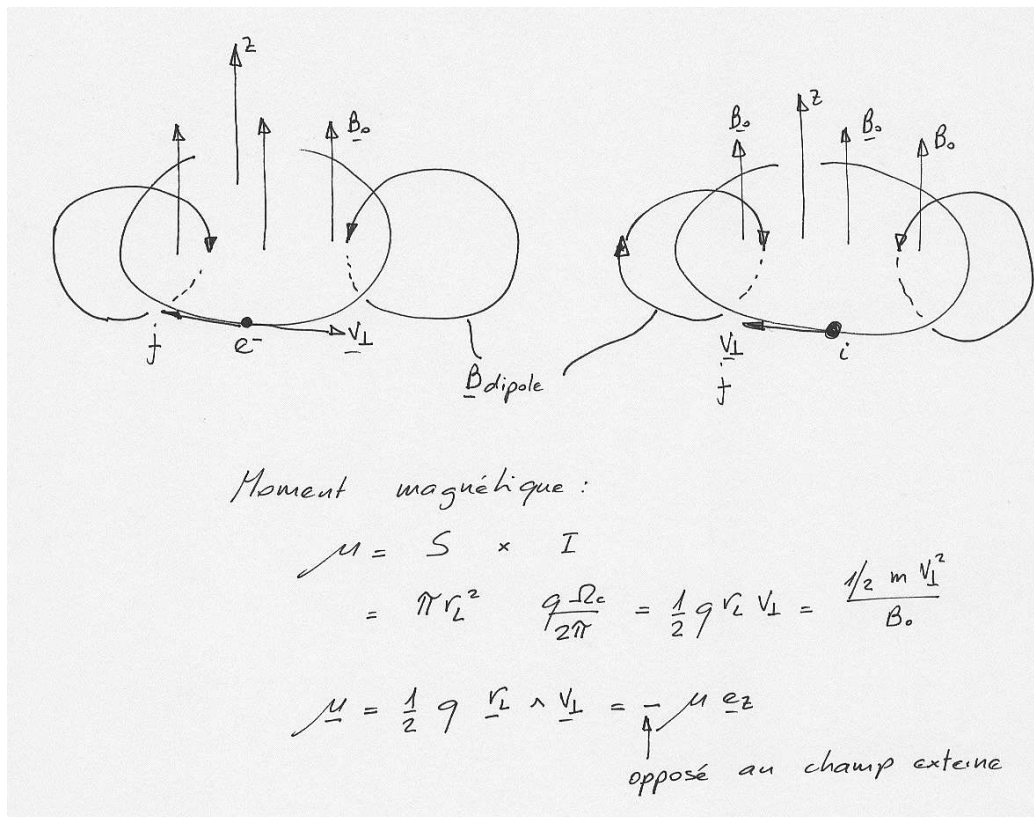


Figure 37: Effet diamagnétique associé au mouvement cyclotronique.

5.3 Mouvement d'une particule dans un champ magnétique \mathbf{B}_0 et sous l'action d'une force constante \mathbf{F}

L'équation du **mouvement non-relativiste** est:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\mathbf{F}}{m} + \frac{q}{m} \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}_0 \quad (148)$$

qui se sépare en un mouvement parallèle à \mathbf{B}_0 (noté avec \parallel) et un mouvement perpendiculaire à \mathbf{B}_0 (noté avec \perp):

$$\frac{dv_{\parallel}}{dt} = \frac{F_{\parallel}}{m} \quad (149)$$

$$\frac{d\mathbf{v}_{\perp}}{dt} = \frac{\mathbf{F}_{\perp}}{m} + \frac{q}{m} (\mathbf{v}_{\perp} \wedge \mathbf{B}_0) \quad (150)$$

Le mouvement parallèle à \mathbf{B}_0 est un mouvement uniformément accéléré.

Pour résoudre l'équation (150), introduisons une **vitesse de dérive** \mathbf{v}_D donnée par:

$$\mathbf{v}_D = \frac{1}{q} \frac{\mathbf{F}_\perp \wedge \mathbf{B}_0}{B_0^2} \quad (151)$$

\mathbf{v}_D est appelée vitesse de dérive et est par définition constante, car la force \mathbf{F}_\perp et \mathbf{B}_0 sont constants par définition. Ce terme de vitesse est introduit pour que l'on puisse éliminer \mathbf{F}_\perp/m par la suite. Réécrivons la vitesse \mathbf{v}_\perp comme

$$\mathbf{v}_\perp = \tilde{\mathbf{v}}_\perp + \mathbf{v}_D \quad (152)$$

Ceci est tout simplement une décomposition de \mathbf{v}_\perp (i.e. **un changement de référentiel galiléen**).

On a alors

$$\frac{d\mathbf{v}_\perp}{dt} = \frac{d\tilde{\mathbf{v}}_\perp}{dt} = \frac{q}{m} [\tilde{\mathbf{v}}_\perp \wedge \mathbf{B}_0] + \frac{1}{m} \frac{(\mathbf{F}_\perp \wedge \mathbf{B}_0) \wedge \mathbf{B}_0}{B_0^2} + \frac{\mathbf{F}_\perp}{m} \quad (153)$$

Or

$$\frac{(\mathbf{F}_\perp \wedge \mathbf{B}_0) \wedge \mathbf{B}_0}{B_0^2} = -\frac{\mathbf{B}_0 \wedge (\mathbf{F}_\perp \wedge \mathbf{B}_0)}{B_0^2} = -\frac{B_0^2}{B_0^2} \mathbf{F}_\perp + \frac{(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{F}_\perp) \mathbf{B}_0}{B_0^2} = -\mathbf{F}_\perp$$

où on a utilisé l'identité vectorielle:

$$\mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{c} \quad (154)$$

Ainsi l'équation (153) se réduit à:

$$\frac{d\tilde{\mathbf{v}}_\perp}{dt} = \frac{q}{m} [\tilde{\mathbf{v}}_\perp \wedge \mathbf{B}_0] \quad (155)$$

Le mouvement perpendiculaire de la particule, dans le référentiel se mouvant à la vitesse \mathbf{v}_D , est donc le mouvement cyclotron. Le centre de guidage a une vitesse égale à la vitesse de dérive \mathbf{v}_D . Le mouvement perpendiculaire total est donc une cycloïde (voir figures 38 et 39). Notons que \mathbf{v}_D dépend de la charge: **les vitesses de dérive sont opposées pour des charges opposées lorsque la force \mathbf{F} est indépendante de la charge** (par exemple lorsque \mathbf{F} est une force de gravité ou analogue à cette dernière, c'est à dire du type $\alpha \mathbf{g}$).

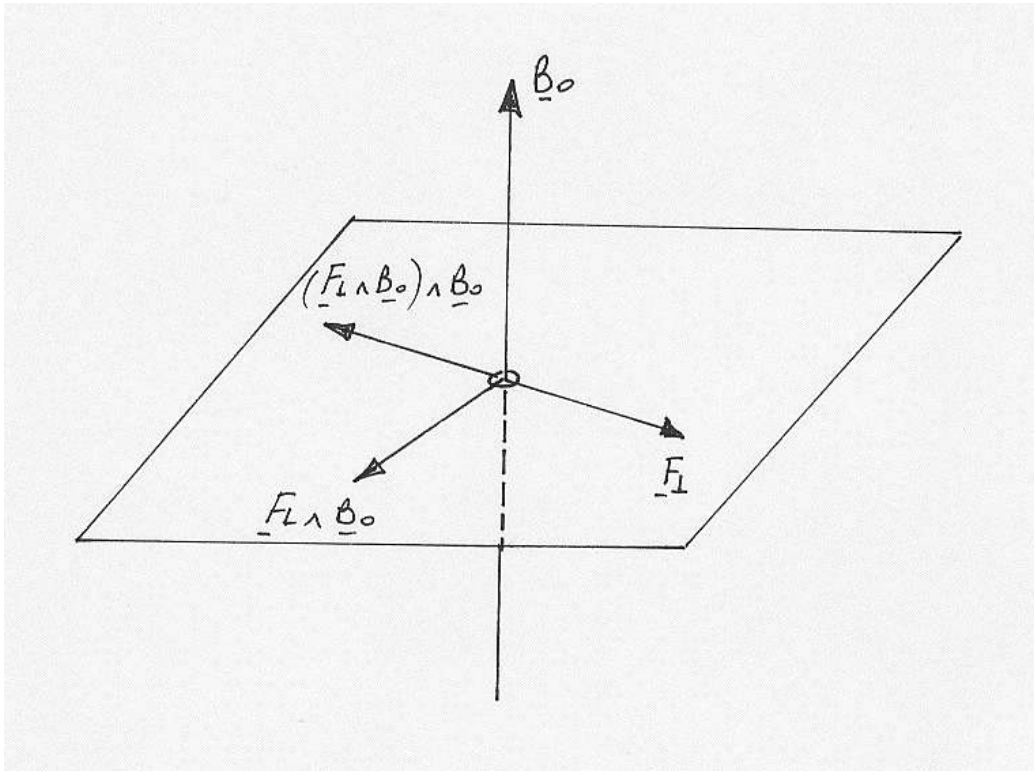


Figure 38: Décomposition des forces

5.3.1 La dérive ($\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}_0$)

Comme cas particulier de la force \mathbf{F}_\perp , prenons la force due à un champ électrique \mathbf{E}_\perp constant et perpendiculaire à \mathbf{B}_0 :

$$\mathbf{F}_\perp = q\mathbf{E}_\perp \quad (156)$$

La vitesse de dérive \mathbf{v}_D est alors

$$\mathbf{v}_D = \frac{\mathbf{F}_\perp \wedge \mathbf{B}_0}{qB_0^2} = \frac{\mathbf{E}_\perp \wedge \mathbf{B}_0}{B_0^2} \quad (157)$$

La dérive induite par un champ électrique \mathbf{E}_\perp perpendiculaire à \mathbf{B}_0 est indépendante de la charge de la particule.

5.3.2 Application à l'instabilité Rayleigh-Taylor

Cette instabilité est celle d'un liquide lourd sur un liquide léger dans le champ de gravité qui définit un **système non-homogène** où non-homogénéité est

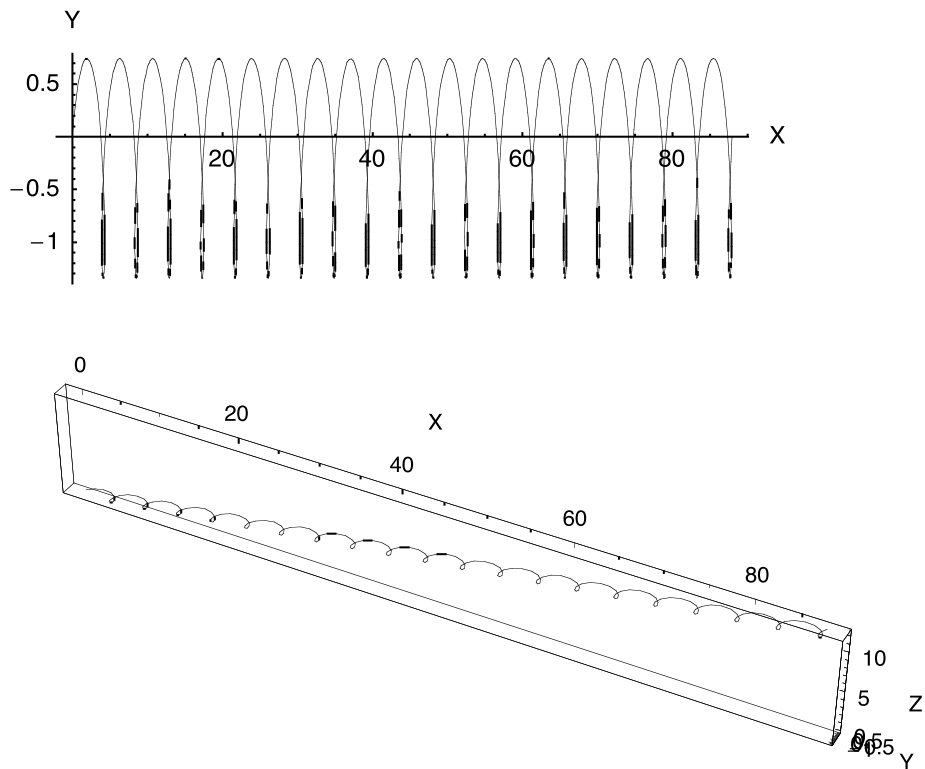


Figure 39: En haut: trajectoire d'un électron sous l'action de \mathbf{F}_\perp parallèle à $-\mathbf{e}_y$ dans un champ magnétique $B_0\mathbf{e}_z$. \mathbf{e}_z sort de la feuille. La vitesse de dérive des électrons \mathbf{v}_D est alors selon \mathbf{e}_x . En bas: trajectoire dans l'espace où on a supposé une vitesse initiale selon \mathbf{e}_z non-nulle.

reliée à la variation de densité du milieu. La **condition d'équilibre** est simplement que l'interface entre les deux liquides est un plan horizontal. Notre expérience de chaque jour montre que les deux liquides inversent leur position : le liquide lourd est à la fin du processus au-dessous du liquide léger. On dit dans ce cas que **l'équilibre est instable**.

Un plasma supporté par un champ magnétique dans un champ gravitationnel \mathbf{g} est instable (cf. figure 40). On peut obtenir une image physique de l'origine de cette instabilité à partir du mouvement des ions et des électrons de charge respective q et $-q$.

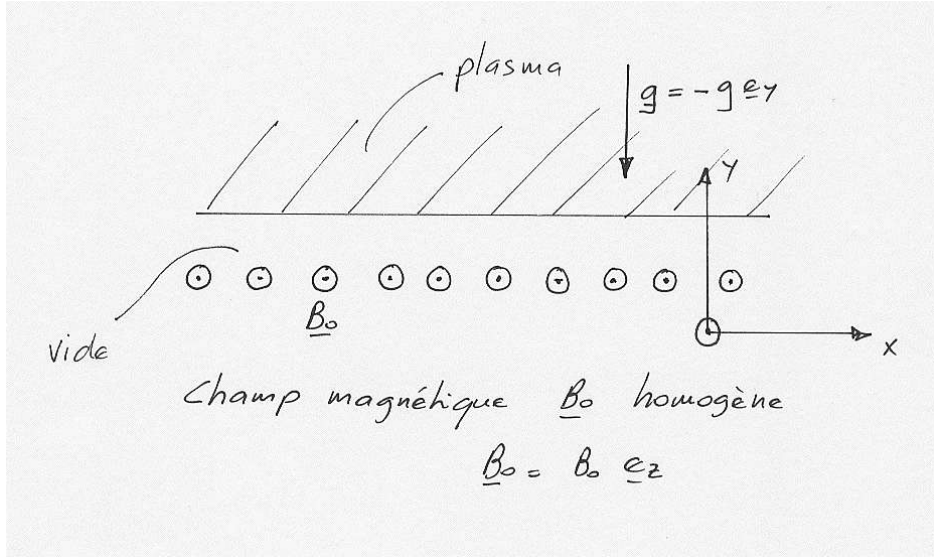


Figure 40: Configuration donnant lieu à une instabilité de Rayleigh-Taylor

Le champ gravitationnel \mathbf{g} produit une force sur les ions

$$\mathbf{F}_{\perp i} = m_i \mathbf{g} \quad (158)$$

et sur les électrons

$$\mathbf{F}_{\perp e} = m_e \mathbf{g} \quad (159)$$

$\mathbf{F}_{\perp i}$ et $\mathbf{F}_{\perp e}$ induisent respectivement une dérive sur les ions

$$\mathbf{v}_{Di} = \frac{m_i \mathbf{g} \wedge \mathbf{B}_0}{q B_0^2} \quad (160)$$

et une dérive sur les électrons

$$\mathbf{v}_{De} = -\frac{m_e \mathbf{g} \wedge \mathbf{B}_0}{q B_0^2} \quad (161)$$

\mathbf{v}_{Di} et \mathbf{v}_{De} sont donc opposées et \mathbf{v}_{Di} est mi/me fois supérieure à \mathbf{v}_{De} . Les particules positives et négatives dérivant dans des directions opposées donnent lieu à une **séparation de charges** et donc naissance à un champ électrique \mathbf{E} (voir figure 41). Le champ \mathbf{E} , perpendiculaire à \mathbf{B}_0 , donne alors naissance à une dérive \mathbf{V}_D

$$\mathbf{V}_D = \frac{\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}_0}{B_0^2} \quad (162)$$

parallèle à \mathbf{g} dans les régions où le plasma a envahi le vide et antiparallèle à \mathbf{g} dans les régions abandonnées par le plasma. Cette dérive augmente alors la perturbation¹³.

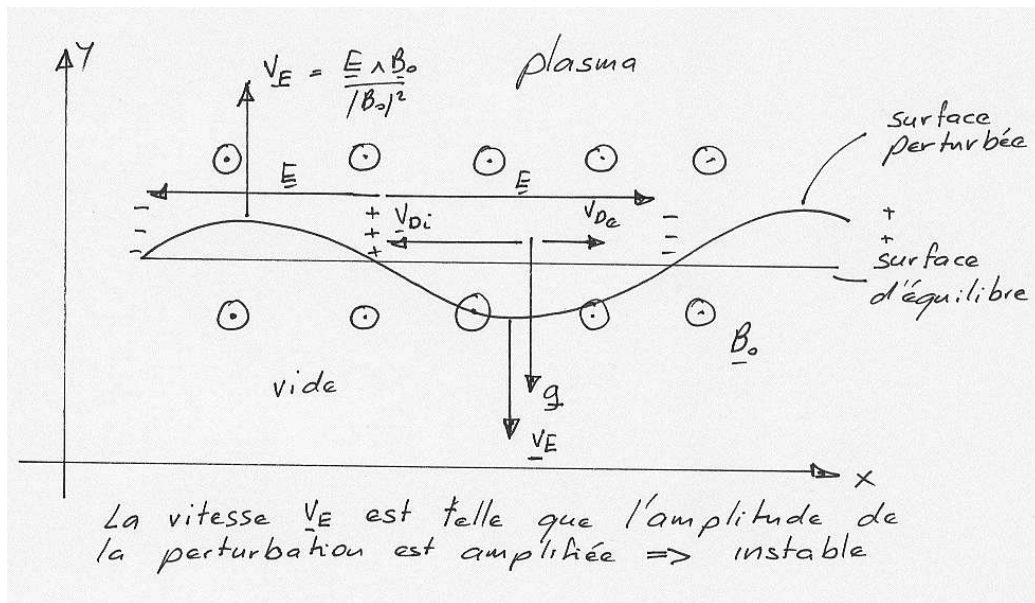


Figure 41: Schéma indiquant les vitesses de dérives \mathbf{v}_{Di} et \mathbf{v}_{De} , le champ électrique \mathbf{E} induit et la vitesse de dérive résultante \mathbf{V}_E .

¹³On verra plus loin que dans un plasma magnétisé, avec une structure de champ magnétique inhomogène, $\mathbf{B}_0 = \mathbf{B}_0(\mathbf{r})$, on peut associer l'accélération de gravité à la courbure des lignes de champ magnétique ce qui implique qu'en fonction du sens de la courbure, le plasma peut devenir localement instable.

5.4 Mouvement d'une particule dans un champ magnétique lentement variable dans le temps.

Supposons que le champ magnétique **varie lentement dans le temps** c-à-d

$$\frac{1}{B_0 |\Omega_c|} \left| \frac{\partial \mathbf{B}_0}{\partial t} \right| \ll 1 \quad (163)$$

Nous n'allons pas calculer la trajectoire de la particule, mais une **constante du mouvement**. La variation du champ magnétique change le rayon de Larmor: l'orbite de la particule change et l'énergie cinétique transverse varie. Cette variation d'énergie est donnée ou absorbée par le champ électrique induit \mathbf{E} :

$$\nabla \wedge \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}_0}{\partial t} \quad (164)$$

En effet

$$\frac{dW_\perp}{dt} = \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} m v_\perp^2 \right] = m \mathbf{v}_\perp \cdot \frac{d\mathbf{v}_\perp}{dt} = q \mathbf{v}_\perp \cdot \mathbf{E} \quad (165)$$

En écrivant

$$\mathbf{v}_\perp = \frac{d\mathbf{l}}{dt}$$

où $d\mathbf{l}$ est un élément de longueur le long de la trajectoire, l'équation (165) devient

$$\frac{dW_\perp}{dt} = q \mathbf{E} \cdot \frac{d\mathbf{l}}{dt} \quad (166)$$

Moyennée sur une orbite, la variation de l'énergie cinétique perpendiculaire est

$$\delta W_\perp = q \int_0^{2\pi/\Omega_c} \mathbf{E} \cdot \frac{d\mathbf{l}}{dt} dt \quad (167)$$

Si les changements des orbites sont faibles, on peut remplacer l'intégrale sur le temps par une intégrale curviligne sur une orbite non-perturbée c'est à dire sur un cercle de rayon égal au rayon de Larmor:

$$\delta W_\perp = q \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = q \int_S (\nabla \wedge \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{S}$$

$$= -q \int_S \frac{\partial \mathbf{B}_0}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \cong |q| \pi r_L^2 \frac{\partial B_0}{\partial t} = \frac{mv_\perp^2}{2} \frac{2\pi}{|\Omega_c|} \frac{\partial_t B_0}{B_0} \quad (168)$$

On notera que le signe - a disparu puisque pour les charges positives ($q > 0$), $\mathbf{B}_0 \cdot d\mathbf{S} < 0$ et pour les charges négatives ($q < 0$), $\mathbf{B}_0 \cdot d\mathbf{S} > 0$. Ceci est une conséquence de la définition de $d\mathbf{l}$ considérée ici qui change de signe entre $q > 0$ et $q < 0$.

En une période $T_c = 2\pi/\Omega_c$ le changement de B_0 est

$$\delta \mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{B}_0}{\partial t} T_c = \frac{\partial \mathbf{B}_0}{\partial t} \frac{2\pi}{\Omega_c} \quad (169)$$

En insérant l'équation (169) dans la (168) on obtient:

$$\delta W_\perp = \frac{W_\perp}{B_0} \delta B \quad (170)$$

$$\text{soit } \frac{\delta W_\perp}{B_0} - \frac{W_\perp}{B_0^2} \delta B = 0$$

$$\delta \left[\frac{W_\perp}{B_0} \right] = 0 \quad (171)$$

La quantité (W_\perp/B_0) est donc une constante du mouvement lorsque le champ \mathbf{B}_0 varie lentement.

Donnons maintenant une interprétation de W_\perp/B_0 . Rappelons d'abord que le moment magnétique μ d'une boucle de courant I_L de rayon r_L est

$$\mu = \pi I_L r_L^2 \quad (172)$$

Une particule tournant sur une orbite de Larmor à la fréquence cyclotron Ω_c crée un courant

$$I_L = \frac{q\Omega_c}{2\pi} \quad (173)$$

et le moment magnétique est

$$\mu = \pi \frac{q\Omega_c}{2\pi} \frac{v_\perp^2}{\Omega_c^2} \quad (174)$$

$$\mu = \frac{1}{2} \frac{mv_{\perp}^2}{B_0} = \frac{W_{\perp}}{B_0} \quad (175)$$

L'équation (171) décrit donc **la conservation du moment magnétique** μ lorsque le champ B_0 est faiblement variable

$$\delta[\mu] = 0 \quad (176)$$

On dit que **le moment magnétique μ est un invariant adiabatique**. Par là on entend que μ est invariant lorsque la variation de $B_0(t)$ est adiabatique, c.-à-d. lente.

L'équation (170) montre aussi que δW_{\perp} est augmenté lorsque l'on augmente B_0 d'une manière adiabatique. Ceci est donc une méthode de chauffage du plasma, connu sous le nom de *chauffage par compression adiabatique*. Le terme compression vient du fait que lorsque B_0 est augmenté, le plasma est également comprimé (*Pourquoi?*).

5.4.1 Invariant adiabatiques

Nous avons vu le moment magnétique μ est un invariant adiabatique, ce qui signifie que μ est constant lorsque le champ magnétique varie de manière adiabatique c. à d. lentement par rapport à la période cyclotronique.

La théorie générale des déformations lentes (adiabatiques) d'un mouvement périodique peut se faire en utilisant les méthodes de la mécanique analytique. Elle montre que la variation de la période s'effectue en conservant approximativement une certaine grandeur associée au mouvement périodique. Une telle constante approchée est appelée un invariant adiabatique. Plus précisément si q (dans ce paragraphe ne pas confondre q avec la charge) est la coordonnées canonique généralisée qui décrit la mouvement cyclique et p le moment canonique conjugué; l'invariant adiabatique associé est:

$$I = \frac{1}{2\pi} \oint p dq \quad (177)$$

où l'intégrale est effectuée sur une période T de variation de q .

On peut interpréter l'équation (177) comme $1/2\pi$ fois la surface de l'espace de phase couvert lors d'une période du mouvement. Pour le cas d'un oscillateur harmonique de masse m avec une énergie totale E et une fréquence angulaire

ω , on a que la surface de l'espace de phase est une ellipse (c.f. cours de mécanique analytique) et I s'écrit comme:

$$I = \frac{1}{2\pi} \oint p(q') dq' = \frac{1}{2\pi} \iint dp dq = \frac{1}{2\pi} \pi \sqrt{2mE} \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} = E/\omega \quad (178)$$

où $\sqrt{2mE}$ et $\sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}$ sont les demi-axes de l'ellipse.

Pour le cas d'une particule de charge e dans un champ magnétique variable $\mathbf{B}(t)$, (c.f. Fig.42) la coordonnée généralisée est l'angle de rotation instantané θ et le moment conjugué est (à ne pas confondre avec le moment mécanique):

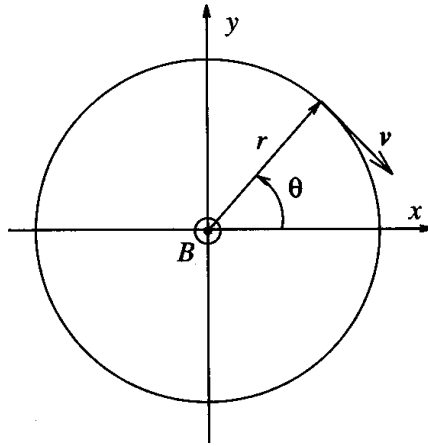


Figure 42: Particule dans un champ magnétique lentement variable.

$$P_\theta = mr^2\dot{\theta} + \frac{1}{2}eB(t)r^2 \quad (179)$$

en utilisant la relation, $\dot{\theta} = -\Omega_c = -eB/m$, il vient:

$$P_\theta = \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta} \quad (180)$$

et l'action I_θ :

$$I_\theta = \frac{1}{2\pi} \oint P_\theta d\theta = P_\theta = \frac{1}{2}m(r\dot{\theta})^2 \frac{1}{\dot{\theta}} = -\frac{W_\perp}{\Omega_c} \quad (181)$$

où W_{\perp} est l'énergie cinétique perpendiculaire de la particule. Puisque $\mu = \frac{W_{\perp}}{\Omega_c}$ est constant pour une variation adiabatique de B on a que I_{θ} est un invariant adiabatique et est appelé le **premier invariant**.

- **Mouvement 1D d'une particule soumise à un potentiel $V(x, t)$ lentement variable**

Pour fixer les idées considérons un problème un peu plus général du mouvement uni-dimensionnel d'une particule de masse m soumise à un potentiel $V(x, t)$ qui varie lentement dans le temps (c.f. Fig.43).

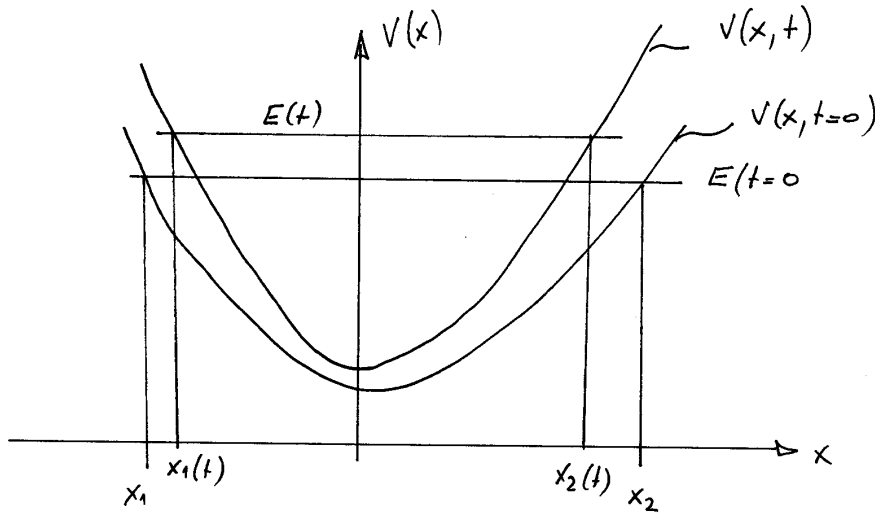


Figure 43: Particule dans un potentiel lentement variable (variation adiabatique) $V(x, t)$. La variation du potentiel entre $t = 0$ et $t = t$ est lente par rapport à la période d'oscillation T .

Si le potentiel est fixe dans le temps $V(x)$ (par exemple $V(x, t = 0)$ dans Fig.43, l'équation du mouvement est:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dV}{dx} = 0 \tag{182}$$

où, $\mathbf{F} = -\nabla V$ and $F_x = -\frac{\partial V}{\partial x}$. En multipliant (182) par $\frac{dx}{dt}$ et en intégrant on obtient:

$$\frac{m}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + V(x) = W \quad (183)$$

qui exprime la conservation de l'énergie totale.

A partir de l'équation (183) on peut exprimer la période d'oscillation comme:

$$T = \oint dt = \oint \frac{dx}{[2/m(W - V(x))]^{1/2}} \quad (184)$$

Avec la coordonnée généralisée $q \equiv x$ et le moment conjugué $P = mv_x$, l'intégral d'action devient:

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2\pi} \oint pdq = \frac{1}{2\pi} \oint m \frac{dx}{dt} dx = \frac{1}{2\pi} \oint [2m(W - V(x))]^{1/2} dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{x_1}^{x_2} [2m(W - V(x))]^{1/2} dx \quad (185) \end{aligned}$$

où x_1 et x_2 sont les points de rebroussement de la particule.

Pour étudier le mouvement de la particule dans un potentiel qui varie lentement dans le temps (par rapport à la période T) on exprime le potentiel en fonction d'un paramètre $\lambda(t)$ (qui varie dans le temps) en plus de la dépendance en x .

$$\Rightarrow V(x, t) \rightarrow V(x, \lambda(t))$$

Il est important de remarquer que dans ce cas l'énergie totale n'est plus une constante du mouvement puisque:

$$W(t) = \frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + V(x, \lambda(t)) \quad (186)$$

On va montrer que sous la condition de variation lente de $\lambda(t)$, I est un invariant adiabatique. Pour montrer cela il faut calculer la dérivée temporelle:

$$\frac{dI}{dt} = \frac{1}{\pi} \frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} [2m(W - V(x))]^{1/2} dx \quad (187)$$

En utilisant l'hypothèse d'adiabaticité, on peut supposer que sur une période d'oscillation T , l'énergie totale W est constante, mais varie lentement sur plusieurs périodes. Ceci signifie que $\lambda(t)$ est fixe lorsqu'on évalue l'intégrale (187), bien que les points de rebroussement (x_1, x_2) ainsi que l'intégrand dépendent du temps sur une échelle temporelle longue comparée à T .

En tenant compte de ceci, la différentiation de (187) devient:

$$\pi \frac{dI}{dt} = \frac{d}{dt} \underbrace{\int_{x_1(t)}^{x_2(t)} [2m(W - V(x, \lambda))]^{1/2} dx}_{F(x_1(t), x_2(t), t)} = \frac{\partial F}{\partial x_2} \bigg|_{x_1, \lambda} \frac{dx_2}{dt} + \frac{\partial F}{\partial x_1} \bigg|_{x_1, \lambda} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial F}{\partial t} \bigg|_{x_1, x_2} \quad (188)$$

On peut montrer (c.f. exercice) que :

$$\pi \frac{dI}{dt} = - \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial V}{\partial x} dx = V(x_1) - V(x_2) \approx 0 \quad (189)$$

puisque sur une période de l'oscillation $V(x_1) \approx V(x_2)$.

Dans la dérivation on a implicitement supposé que les points de rebroussement varient de manière continue. La situation montrée dans la Figure 44 ne

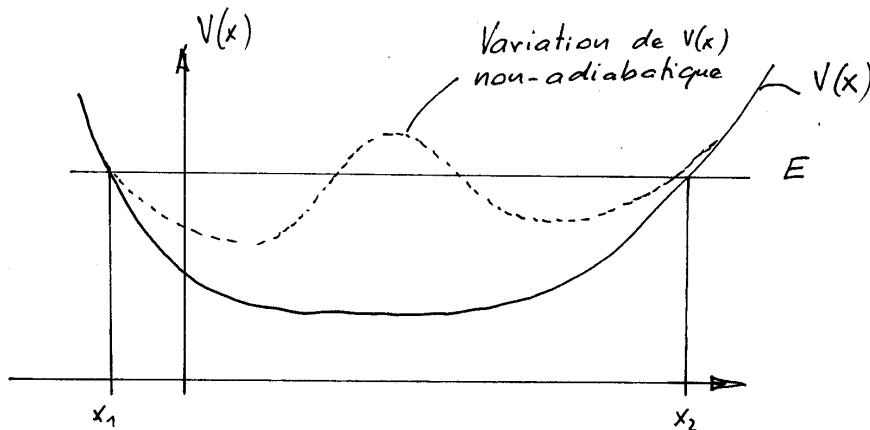


Figure 44: Variation non-adiabatique pour la particule ayant une énergie initiale E .

satisfait pas cette hypothèse puisque les points de rebroussement se modifient de manière non-adiabatique.

- **Deuxième invariant adiabatique**

Dans un champ magnétique qui varie de manière adiabatique (temporellement ou spatialement) on peut montrer qu'en plus du premier invariant (μ : moment magnétique) on a deux autres invariants.

Discutons ici le deuxième invariant.

Dans un champ magnétique l'énergie cinétique totale de la particule est une constante du mouvement

$$W = \frac{1}{2}mv_{\perp}^2 + \frac{1}{2}mv_{\parallel}^2 \quad (190)$$

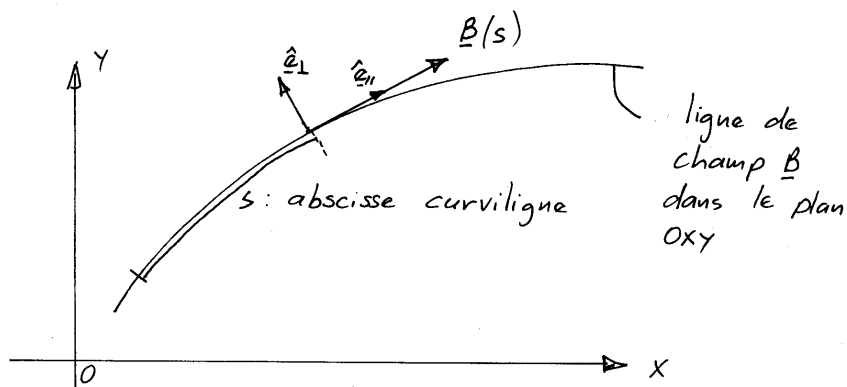


Figure 45: Mouvement \parallel d'une particule le long d'une ligne de champ magnétique. L'amplitude du champ $|\mathbf{B}(s)|$ est paramétrée par l'abscisse curviligne s .

en utilisant la conservation du moment magnétique (1^{er} invariant) on peut écrire (190) sous la forme

$$W = \frac{1}{2}mv_{\parallel}^2 + V = \frac{1}{2}mv_{\parallel}^2 + \mu B$$

Dans cette situation le potentiel $V(s) = \mu B(s)$. Pour une particule sur une ligne de champ $\mathbf{B}(s)$ (c.f. Fig.45) l'équation du mouvement parallèle à la ligne de champ peut être écrite comme

$$m \frac{dv_{\parallel}}{ds} + \frac{\partial}{\partial s}(\mu B(s)) = 0$$

s est l'abscisse curviligne et $\mu B(s) = V(s)$ étant le potentiel. Nous avons donc le cas d'une particule dans un potentiel 1D et on peut donc utiliser l'exemple décrit auparavant pour montrer que

$$I_2 = \frac{1}{2\pi} \oint m v_{\parallel} ds \quad (191)$$

est un invariant adiabatique dans le cas où le champ magnétique varie de manière lente (adiabatique) par rapport au temps d'oscillation entre les points de rebroussement.

Puisque le champ magnétique agit comme un potentiel sur la particule chargée, on peut donc confiner spatialement des particules dans un système appelé miroir magnétique et qui sera discuté ultérieurement dans le cours.

Dans le cas où le centre de guidage de la particule a aussi un mouvement périodique on montre qu'il existe un troisième invariant I_3 qui correspond au flux de champ magnétique inclus dans la trajectoire du centre de guidage.

$$I_3 = \text{Cte.} \pi R^2 \langle B \rangle \quad (192)$$

où R est la position du centre de guidage et $\langle B \rangle$ est le champ magnétique moyen dans le cercle de rayon R .

Référence H. Goldstein : Classical Mechanics , Second Edition, Addison Wesley (1980), p 531.

5.5 Mouvement d'une particule dans un champ magnétique statique \mathbf{B}_0 et un champ électrique variable $\mathbf{E}(t)$

Nous allons distinguer deux cas selon la valeur de la variation de E pendant une période cyclotron. Si cette variation est faible, on peut utiliser les résultats dérivés de la théorie adiabatique. Le deuxième cas étudié est celui où $\mathbf{E}(t)$ varie à une fréquence proche de la fréquence cyclotron.

5.5.1 Variation adiabatique (lente)

La condition de validité est:

$$\frac{1}{E |\Omega_c|} \left| \frac{dE}{dt} \right| \ll 1 \quad (193)$$

Nous supposons que \mathbf{E} est perpendiculaire à \mathbf{B}_0 . Le mouvement parallèle à \mathbf{B}_0 est trivial. Si \mathbf{E} était statique, le mouvement de la particule serait la combinaison d'un mouvement cyclotron et d'un mouvement de dérive \mathbf{v}_D^0 avec

$$\mathbf{v}_D^0 = \frac{\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}_0}{B^2} \quad (194)$$

L'introduction d'un champ \mathbf{E} variable dans le temps va modifier cette vitesse de dérive \mathbf{v}_D^0 . Pour résoudre l'équation du mouvement,

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{q}{m} [\mathbf{E}(t) + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}_0] \quad (195)$$

nous allons de nouveau décomposer \mathbf{v} :

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_D^0 + \mathbf{u} \quad (196)$$

\mathbf{u} contient maintenant non seulement le mouvement de giration (comme nous l'avons vu pour le cas \mathbf{E} statique) mais également la dérive due à la variation temporelle de \mathbf{E} .

Substituons l'équation (196) dans l'équation (195)

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{q}{m} \mathbf{u} \wedge \mathbf{B}_0 - \frac{d\mathbf{v}_D^0}{dt} \quad (197)$$

L'équation (197) est du même type que l'équation (150) et se résout par un changement de variable

$$\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{v}_D^P \quad (198)$$

où

$$\mathbf{v}_D^P = -\frac{m}{qB_0^2} \left[\frac{d\mathbf{v}_D^0}{dt} \wedge \mathbf{B}_0 \right] \quad (199)$$

En effet, **en négligeant les dérivées secondes de $\mathbf{E}(t)$**

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{d\tilde{\mathbf{u}}}{dt} = \frac{q}{m} [\tilde{\mathbf{u}} \wedge \mathbf{B}_0] \quad (200)$$

Le terme \mathbf{v}_D^P est appelé **vitesse de dérive due à la polarisation** et vaut

$$\mathbf{v}_D^P = -\frac{m}{qB_0^4} \left[\frac{d\mathbf{E}}{dt} \wedge \mathbf{B}_0 \right] \wedge \mathbf{B}_0 \quad (201)$$

$$\mathbf{v}_D^P = \frac{m}{qB_0^2} \frac{d\mathbf{E}}{dt} \quad (202)$$

\mathbf{v}_D^P dépend du signe de la charge et de la dérivée temporelle du champ électrique $\mathbf{E}(t)$.

La dérive totale est:

$$\mathbf{v}_D = \mathbf{v}_D^0 + \mathbf{v}_D^P = \frac{\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}_0}{B_0^2} + \frac{m}{qB_0^2} \frac{d\mathbf{E}}{dt} \quad (203)$$

Il y a deux résultats intéressants à considérer. Tout d'abord, \mathbf{v}_D^0 est perpendiculaire à \mathbf{E} : il n'y a donc pas d'échange d'énergie entre le champ et les particules. Toutefois, on constate que \mathbf{v}_D^0 , mesurée entre deux instants, varie car \mathbf{E} change: il y a donc changement de l'énergie cinétique associée à \mathbf{v}_D^0 . Cette énergie provient du travail W exécuté par le champ \mathbf{E} sur la particule lorsqu'elle dérive selon \mathbf{v}_D^P :

$$\delta W = \int_{t_1}^{t_2} q\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}_D^P dt = \frac{m}{B_0^2} \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{E} \cdot \frac{d\mathbf{E}}{dt} dt \quad (204)$$

La variation d'énergie cinétique $\frac{1}{2}m(v_D^0)^2$ est:

$$\delta\left(\frac{1}{2}m(v_D^0)^2\right) = \frac{m}{B_0^2} \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{E} \cdot \frac{d\mathbf{E}}{dt} dt \quad (205)$$

La comparaison des équations (204) et (205) montre que la variation d'énergie cinétique $\frac{1}{2}m(\mathbf{v}_D^0)^2$ est égale au travail de la force électrique sur la particule lors de son mouvement de dérive \mathbf{v}_D^P .

5.5.2 Variation temporelle du champ électrique \mathbf{E} à une fréquence ω proche de Ω_c

Nous supposons:

$$\mathbf{E}(t) = \tilde{\mathbf{E}} \exp(i\omega t) \quad (206)$$

L'équation de Newton est alors

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{q}{m} [\tilde{\mathbf{E}} \exp(i\omega t) + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}_0] \quad (207)$$

Intuitivement nous nous attendons à trouver une solution qui dépend de $\exp(i\omega t)$. Essayons alors l'Ansatz suivant:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_M + \mathbf{v}_E \exp(i\omega t) \quad (208)$$

où \mathbf{v}_M a une dépendance temporelle autre que $\exp(i\omega t)$.

Insérant l'équation (208) dans la (207) nous obtenons:

$$\frac{d\mathbf{v}_M}{dt} + i\omega \mathbf{v}_E \exp(i\omega t) = \frac{q}{m} \left\{ \tilde{\mathbf{E}} \exp(i\omega t) + \mathbf{v}_M \wedge \mathbf{B}_0 + [\mathbf{v}_E \wedge \mathbf{B}_0] \exp(i\omega t) \right\} \quad (209)$$

L'équation (209) se sépare en deux équations, une première indépendante de ω

$$\frac{d\mathbf{v}_M}{dt} = \frac{q}{m} (\mathbf{v}_M \wedge \mathbf{B}_0) \quad (\text{Mvt. cyclotron}) \quad (210)$$

et une seconde qui dépend de ω

$$i\omega \mathbf{v}_E = \frac{q}{m} [\tilde{\mathbf{E}} + \mathbf{v}_E \wedge \mathbf{B}_0] \quad (211)$$

L'équation (210) décrit de nouveau le mouvement cyclotron. L'équation (211) décrit le mouvement forcé à la fréquence ω

$$\left[i\omega + \frac{q}{m} \mathbf{B}_0 \wedge \right] \mathbf{v}_E = \frac{q}{m} \tilde{\mathbf{E}} \quad (212)$$

Pour résoudre l'équation (212), multiplions les deux membres par l'opérateur $\left[i\omega - \frac{q}{m} \mathbf{B}_0 \wedge \right]$

$$\begin{aligned} \left[i\omega - \frac{q}{m} \mathbf{B}_0 \wedge \right] \left\{ \left[i\omega + \frac{q}{m} \mathbf{B}_0 \wedge \right] \mathbf{v}_E \right\} &= \frac{q}{m} \left[i\omega - \frac{q}{m} \mathbf{B}_0 \wedge \right] \tilde{\mathbf{E}} \\ -\omega^2 \mathbf{v}_E - \frac{q^2}{m^2} \mathbf{B}_0 \wedge (\mathbf{B}_0 \wedge \mathbf{v}_E) &= \frac{q}{m} \left[i\omega - \frac{q}{m} \mathbf{B}_0 \wedge \right] \tilde{\mathbf{E}} \\ -\omega^2 \mathbf{v}_E - \frac{q^2}{m^2} [(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{v}_E) \mathbf{B}_0 - B_0^2 \mathbf{v}_E] &= \frac{q}{m} \left[i\omega - \frac{q}{m} \mathbf{B}_0 \wedge \right] \tilde{\mathbf{E}} \end{aligned} \quad (213)$$

Soit $\tilde{\mathbf{E}} = \mathbf{E}_{\parallel} + \mathbf{E}_{\perp}$ où les indices parallèle et perpendiculaire se réfèrent au champ magnétique \mathbf{B}_0 .

Le mouvement parallèle est alors:

$$-\omega^2 \mathbf{v}_{E_{\parallel}} = \frac{q}{m} i\omega \mathbf{E}_{\parallel} \quad (214)$$

soit

$$\mathbf{v}_{E_{\parallel}} = -\frac{iq}{m\omega} \mathbf{E}_{\parallel} \quad (215)$$

Le mouvement perpendiculaire est donné par

$$\left[-\omega^2 + \frac{q^2}{m^2} B_0^2 \right] \mathbf{v}_{E_{\perp}} = \frac{q}{m} \left[i\omega - \frac{q}{m} \mathbf{B}_0 \wedge \right] \mathbf{E}_{\perp} \quad (216)$$

soit

$$\mathbf{v}_{E_{\perp}} = \frac{\frac{q}{m} [i\omega - \mathbf{\Omega}_c \wedge] \mathbf{E}_{\perp}}{\Omega_c^2 - \omega^2} \quad (217)$$

où

$$\mathbf{\Omega}_c = \frac{q}{m} \mathbf{B}_0$$

Pour étudier plus en détail l'équation (217), nous allons décomposer \mathbf{E}_\perp , qui est linéairement polarisé, en une somme de deux vecteurs circulairement polarisés:

$$\mathbf{E}_\perp = \underbrace{\frac{1}{2} \left[\mathbf{E}_\perp + i \frac{\boldsymbol{\Omega}_c \wedge \mathbf{E}_\perp}{\Omega_c} \right]}_{\mathbf{E}_L} + \underbrace{\frac{1}{2} \left[\mathbf{E}_\perp - i \frac{\boldsymbol{\Omega}_c \wedge \mathbf{E}_\perp}{\Omega_c} \right]}_{\mathbf{E}_R} \quad (218)$$

Examinons chaque terme de la somme (218). Prenons par exemple \mathbf{E}_L . Ses composantes sont:

$$\mathbf{E}_L = \frac{\tilde{E}_\perp}{2} \left\{ \mathbf{e}_x \underbrace{\text{Re}[\exp(i\omega t)]}_{\cos \omega t} + \mathbf{e}_y \underbrace{\text{Re}[\exp(i\omega t + \frac{i\pi}{2})]}_{-\sin \omega t} \right\} \quad (219)$$

On voit que \mathbf{E}_L est polarisé circulairement. Son sens de giration est gauche lorsque l'on regarde en direction de Oz, soit en direction de \mathbf{B}_0 . De même \mathbf{E}_R est donné par:

$$\mathbf{E}_R = \frac{E_\perp}{2} \cos \omega t e_x + \frac{E_\perp}{2} \sin \omega t e_y \quad (220)$$

\mathbf{E}_R est polarisé circulairement droite lorsque l'on regarde en direction de \mathbf{B}_0 .

Calculons la valeur du numérateur de l'équation (217) avec la composante \mathbf{E}_L

$$\begin{aligned} \frac{q}{m} [i\omega - \boldsymbol{\Omega}_c \wedge] \mathbf{E}_L &= \frac{q}{2m} [i\omega - \boldsymbol{\Omega}_c \wedge] \left[\mathbf{E}_\perp + i \frac{\boldsymbol{\Omega}_c \wedge \mathbf{E}_\perp}{\Omega_c} \right] \\ &= \frac{q}{2m} \left[i\omega \mathbf{E}_\perp - \boldsymbol{\Omega}_c \wedge \mathbf{E}_\perp - \omega \frac{\boldsymbol{\Omega}_c \wedge \mathbf{E}_\perp}{\Omega_c} - i \frac{\boldsymbol{\Omega}_c \wedge (\boldsymbol{\Omega}_c \wedge \mathbf{E}_\perp)}{\Omega_c} \right] \\ &= \frac{q}{2m} \left[i\omega \mathbf{E}_\perp - \boldsymbol{\Omega}_c \wedge \mathbf{E}_\perp - \omega \frac{\boldsymbol{\Omega}_c \wedge \mathbf{E}_\perp}{\Omega_c} + i\Omega_c \mathbf{E}_\perp \right] \\ &= \frac{q}{2m} i(\omega + \Omega_c) \left[\mathbf{E}_\perp + i \frac{\boldsymbol{\Omega}_c \wedge \mathbf{E}_\perp}{\Omega_c} \right] \\ \frac{q}{m} [i\omega - \boldsymbol{\Omega}_c \wedge] \mathbf{E}_L &= \frac{q}{m} i(\omega + \Omega_c) \mathbf{E}_L \end{aligned} \quad (221)$$

De même

$$\frac{q}{m} [i\omega - \boldsymbol{\Omega}_c \wedge] \mathbf{E}_R = \frac{q}{m} i(\omega - \Omega_c) \mathbf{E}_R \quad (222)$$

Les relations (221) et (222) montrent que \mathbf{E}_L et \mathbf{E}_R sont les vecteurs propres associés à l'opérateur $(i\omega - \mathbf{\Omega}_c \wedge)$.

A ces vecteurs propres \mathbf{E}_L et \mathbf{E}_R correspondent donc respectivement les vitesses \mathbf{v}_{EL} et \mathbf{v}_{ER} données par:

$$\mathbf{v}_{EL} = \frac{iq}{m} \frac{\mathbf{E}_L}{\Omega_c - \omega} \quad (223)$$

$$\mathbf{v}_{ER} = -\frac{iq}{m} \frac{\mathbf{E}_R}{\Omega_c + \omega} \quad (224)$$

Pour un ion positif, Ω_c est positif. La formule (223) montre alors que la vitesse perpendiculaire \mathbf{v}_{EL} devient infinie pour $\omega = \Omega_c$ en présence d'un champ électrique gauche \mathbf{E}_L (opposé au sens trigonométrique). Une charge négative a le même comportement en présence d'une onde droite \mathbf{E}_R .

Cette résonance peut être expliquée de la manière suivante. Un ion positif a un mouvement de giration dans le sens gauche à la fréquence Ω_c . Un champ électrique polarisé circulairement gauche et de fréquence Ω_c est toujours en phase avec la particule donnant ainsi lieu à une accélération continue.

Les équations pour $\mathbf{v}_{EL}, \mathbf{v}_{ER}, \mathbf{v}_{E\parallel}$ peuvent s'écrire sous la forme:

$$\mathbf{v}(\omega) = \boldsymbol{\nu}(\omega) \cdot \mathbf{E}(\omega). \quad (225)$$

où $\boldsymbol{\nu}(\omega)$ est le tenseur de mobilité.

Dans la base des vecteurs propres $\mathbf{v}_{EL}, \mathbf{v}_{ER}, \mathbf{v}_{E\parallel}$, l'équation (225) devient:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{v}_{EL} \\ \mathbf{v}_{ER} \\ \mathbf{v}_{E\parallel} \end{pmatrix} = i \frac{q}{m} \begin{pmatrix} \frac{1}{\Omega_c - \omega} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\Omega_c + \omega} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\omega} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{E}_L \\ \mathbf{E}_R \\ \mathbf{E}_{\parallel} \end{pmatrix} \quad (226)$$

Cette même équation dans la base des coordonnées cartésiennes devient:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{v}_{Ex} \\ \mathbf{v}_{Ey} \\ \mathbf{v}_{Ez} \end{pmatrix} = \frac{q}{m} \begin{pmatrix} \frac{i\omega}{\Omega_c^2 - \omega^2} & \frac{\Omega_c}{\Omega_c^2 - \omega^2} & 0 \\ -\frac{\Omega_c}{\Omega_c^2 - \omega^2} & \frac{i\omega}{\Omega_c^2 - \omega^2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{i}{\omega} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{E}_x \\ \mathbf{E}_y \\ \mathbf{E}_z \end{pmatrix} \quad (227)$$

5.6 Mouvement d'une particule dans un champ magnétique indépendant du temps et lentement variable dans l'espace

Nous allons supposer que le champ $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ est inhomogène, c. à .d qui dépend de la position. La figure 46 illustre la géométrie du problème.

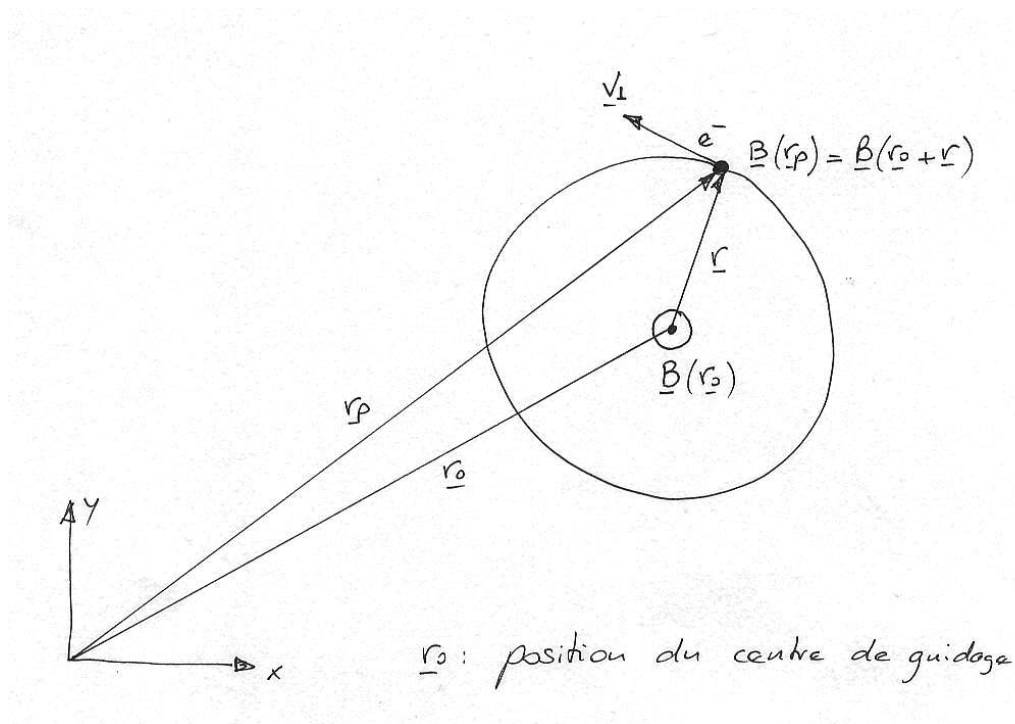


Figure 46: Géométrie pour une particule chargée (électron) dans un champ magnétique faiblement inhomogène.

L'élément essentiel est que le champ à la position du centre de guidage est différent que le champ à la position instantanée de la particule.

On suppose que le champ est faiblement inhomogène ce qui permet d'écrire que:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mathbf{B}(\mathbf{r}_0) + (\mathbf{r} \cdot \nabla_0)\mathbf{B} \quad (228)$$

∇_0 signifie que la dérivation doit être prise en $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$, position du centre de guidage. Le champ est faiblement inhomogène, c'est-à-dire:

$$|\mathbf{B}(\mathbf{r}_0)| \gg |(\mathbf{r} \cdot \nabla_0)\mathbf{B}| \quad (229)$$

cette faible inhomogénéité a pour conséquence que les **orbites sont proches des orbites circulaires correspondantes au cas du champ \mathbf{B} uniforme.**

En remplaçant l'équation (228) dans l'équation du mouvement il vient:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{q}{m} [\mathbf{v} \wedge \mathbf{B} + (\mathbf{v} \wedge (\mathbf{r} \cdot \nabla_0) \mathbf{B})] \quad (230)$$

le terme $(\mathbf{v} \wedge (\mathbf{r} \cdot \nabla_0) \mathbf{B})$ est considéré comme perturbation au premier ordre.

On développe \mathbf{v} en série

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1 \quad (231)$$

En remplaçant dans l'équation (230), à l'ordre 0 dans un développement de perturbation on a:

$$\frac{d\mathbf{v}_0}{dt} = \frac{q}{m} (\mathbf{v}_0 \wedge \mathbf{B})$$

Au premier ordre:

$$\frac{d\mathbf{v}_1}{dt} = \frac{q}{m} (\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{B}) + \frac{q}{m} (\mathbf{v}_0 \wedge (\mathbf{R} \cdot \nabla_0) \mathbf{B}) \quad (232)$$

Dans le terme $(\mathbf{v} \wedge (\mathbf{r} \cdot \nabla_0) \mathbf{B})$, \mathbf{v} a été remplacé par \mathbf{v}_0 car $(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}_0) \mathbf{B}$ est un terme du premier ordre. De plus \mathbf{r} a été remplacé par \mathbf{R} , orbite de giration de la particule à l'ordre 0. Cette dernière substitution a été également faite pour que le terme $(\mathbf{R} \cdot \nabla_0) \mathbf{B}$ soit d'ordre 1.

L'équation (232) est du type

$$\frac{d\mathbf{v}_1}{dt} = \frac{q}{m} [\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{B}] + \frac{\mathbf{F}}{m} \quad (233)$$

c'est -à-dire une équation que nous avons résolue auparavant lorsque \mathbf{F} est constante. Dans le cas de l'équation (233), **\mathbf{F} n'est pas constante** car elle dépend de la position instantanée de la particule à travers \mathbf{R} .

Nous n'allons pas résoudre l'équation (233) en fonction du temps, mais étudier le mouvement sur des échelles de temps de l'ordre de la période cyclotron.

Calculons **la moyenne de \mathbf{F} au cours d'une orbite de giration:**

$$\langle \mathbf{F} \rangle = \langle q \mathbf{v}_0 \wedge (\mathbf{R} \cdot \nabla_0) \mathbf{B} \rangle \quad (234)$$

Dans un système de coordonnées cylindriques avec l'axe Oz parallèle à \mathbf{B} en \mathbf{r}_0 , l'équation (234) se simplifie en

$$\langle \mathbf{F} \rangle = \langle q \mathbf{v}_0 \wedge R \frac{\partial}{\partial r} \Big|_0 \mathbf{B} \rangle \quad (235)$$

La vitesse \mathbf{v}_0 est tangente à l'orbite: \mathbf{v}_0 ne possède qu'une composante azimutale v_θ , par contre le champ magnétique évalué à la position de la particule, \mathbf{R} , aura les trois composantes (B_r, B_θ, B_z) . Par conséquent, la composante B_z va donner naissance à une force perpendiculaire \mathbf{F}_\perp et B_r à une composante parallèle \mathbf{F}_\parallel à B :

$$\langle \mathbf{F}_\perp \rangle = \langle q \mathbf{v}_0 \wedge R \frac{\partial B_z}{\partial r} \Big|_0 \mathbf{e}_z \rangle \quad (236)$$

$$\langle \mathbf{F}_\parallel \rangle = \langle q \mathbf{v}_0 \wedge \mathbf{R} \frac{\partial B_r}{\partial r} \Big|_0 \rangle \quad (237)$$

5.6.1 Mouvement parallèle à \mathbf{B}

Examinons d'abord $\langle \mathbf{F}_\parallel \rangle$. Le vecteur $q \mathbf{v}_0 \wedge \mathbf{R}$ est parallèle à Oz dont la magnitude est constante et égale au double du moment magnétique

$$\langle \mathbf{F}_\parallel \rangle = 2\mu_m \langle \frac{\partial B_r}{\partial r} \Big|_0 \rangle \mathbf{e}_z \quad (238)$$

Evaluons $\langle \frac{\partial B_r}{\partial r} \Big|_0 \rangle$. L'équation de Maxwell $\nabla \cdot \mathbf{B}$ s'écrit en coordonnées cylindriques

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \frac{\partial B_z}{\partial z} + \frac{\partial B_r}{\partial r} + \frac{B_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial B_\theta}{\partial \theta} = 0 \quad (239)$$

La moyenne de $\frac{1}{r} \frac{\partial B_\theta}{\partial \theta}$ est:

$$\langle \frac{1}{r} \frac{\partial B_\theta}{\partial \theta} \rangle = \frac{1}{2\pi R} \int \frac{1}{R} \frac{\partial B}{\partial \theta} R d\theta = \frac{1}{2\pi R} \int \frac{\partial B}{\partial \theta} d\theta = 0 \quad (240)$$

Estimons B_r/r pour de petits r:

$$B_r = B_r(r=0) + \frac{\partial B_r}{\partial r} r \quad (241)$$

Par choix même des axes de coordonnées, en $r=0$ le champ \mathbf{B} est dirigé selon Oz. L'équation (241) devient alors

$$B_r = \frac{\partial B_r}{\partial r} r \quad (242)$$

soit

$$\frac{B_r}{r} = \frac{\partial B_r}{\partial r}(r \rightarrow 0) \quad (243)$$

On a donc

$$2\left\langle \frac{\partial B_r}{\partial r} \right\rangle = -\left\langle \frac{\partial B_z}{\partial z} \right\rangle = -\frac{\partial B_z}{\partial z} \quad (244)$$

L'expression de \mathbf{F}_{\parallel} devient alors

$$\langle \mathbf{F}_{\parallel} \rangle = -\mu_m \frac{\partial B_z}{\partial z} \mathbf{e}_z \quad (245)$$

Si le champ B_z augmente avec z , une force $\langle F_{\parallel} \rangle$ s'exerce sur la particule dans le sens opposé. Montrons que sous l'action de $\langle F_{\parallel} \rangle$ la vitesse parallèle peut s'annuler. Pour cela, on utilise la conservation de l'énergie cinétique (la force magnétique est perpendiculaire au déplacement et ne contribue pas à la variation de l'énergie) et la constance du moment magnétique. Cette dernière résulte de l'adiabaticité du mouvement. La configuration du champ magnétique est donnée à la figure 47: c'est celle des machines miroirs. Le champ B_z est plus élevé aux deux bouts de la machine. Soit $z = z_0$ le plan de symétrie de la machine. Appelons z_t l'endroit où la vitesse parallèle s'annule. La conservation de l'énergie cinétique nous donne alors:

$$W_{\perp}(z_0) + W_{\parallel}(z_0) = W_{\perp}(z_t) \quad (246)$$

et la constance du moment magnétique:

$$\frac{W_{\perp}(z_0)}{B(z_0)} = \frac{W_{\perp}(z_t)}{B(z_t)} \quad (247)$$

En combinant les équations (246) et (247) on obtient

$$\frac{B(z_0)}{B(z_t)} = \frac{W_{\perp}(z_0)}{W_{\perp}(z_t)} = \frac{W_{\perp}(z_0)}{W_{\perp}(z_0) + W_{\parallel}(z_0)} \quad (248)$$

$$\frac{B(z_0)}{B(z_t)} = \frac{v_{\perp}^2(z_0)}{v_{\perp}^2(z_0) + v_{\parallel}^2(z_0)} \quad (249)$$

En dénotant θ_0 l'angle entre \mathbf{v} et $\mathbf{B}(z_0)$, on a

$$\frac{B(z_0)}{B(z_t)} = \sin^2 \theta_0 \quad (250)$$

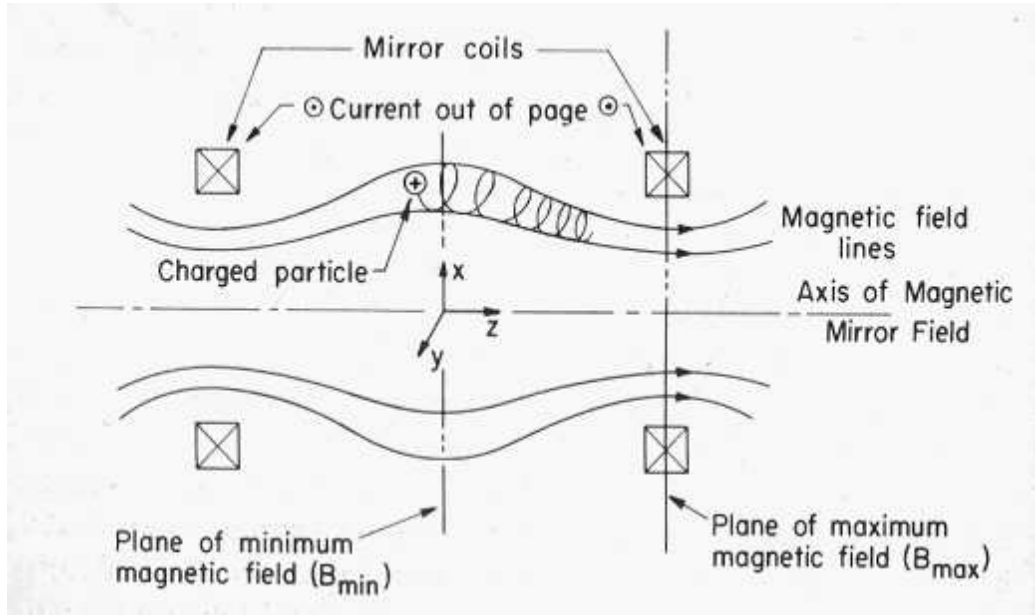


Figure 47: Ligne de champ dans une machine miroir (Tiré de "Principle of Plasma Physics" de Krall et Trivelpiece)

L'équation montre alors que toutes les particules issues de z_0 et possédant le même θ_0 seront réfléchies en z_t et ceci quelle que soit leurs vitesses. Soit B_{max} le champ maximum, le rapport

$$\frac{B(z_0)}{B_{max}} \text{ est appelé rapport miroir.}$$

Le confinement par une machine miroir n'est pas parfait. En effet seules les particules pour lesquelles

$$\sin^2 \theta \geq \frac{B(z_0)}{B_{max}} \quad (251)$$

seront confinées. Les particules avec $\theta < \theta_c$ sortent de la machine. Rappelons $\sin \theta = v_{\perp}/v$: la condition (251) définit alors un cône dans l'espace des vitesses. Toute particule rentrant dans ce cône (appelé cône de perte) ne sera pas confinée. Cette perte fait que les fonctions de distribution dans l'espace de vitesse des particules ne sont jamais isotropes. Notons également que ni la charge ni la masse n'interviennent dans la définition du cône de perte: les ions et les électrons ont le même comportement en absence de collision.

A part l'application dans les machines miroirs, la réflexion des particules par un champ magnétique miroir est également la cause de l'existence de la *ceinture de Van Allen*. Les particules de la ceinture de Van Allen sont confinées

par le champ magnétique terrestre. Ce dernier est plus intense aux pôles qu'à l'équateur formant ainsi un miroir naturel.

5.6.2 Mouvement perpendiculaire à \mathbf{B}

Calculons maintenant la force perpendiculaire due à une variation perpendiculaire du champ \mathbf{B} .

$$\langle \mathbf{F}_\perp \rangle = \langle q \mathbf{v}_0 \wedge R \frac{\partial}{\partial r} \Big|_0 B_z \mathbf{e}_z \rangle \quad (252)$$

On remarque que $q \mathbf{v}_0 \wedge \mathbf{e}_z = -|q|v_0(\mathbf{R}/R)$. On a donc

$$\langle \mathbf{F}_\perp \rangle = -|q|v_0 \langle \mathbf{R} \frac{\partial}{\partial r} \Big|_0 B_z \rangle \quad (253)$$

Pour évaluer $\langle \mathbf{F}_\perp \rangle$, utilisons les coordonnées cartésiennes:

$$\mathbf{R} = R \cos \phi \mathbf{e}_x + R \sin \phi \mathbf{e}_y \quad (254)$$

$$x = r \cos \phi \quad y = r \sin \phi \quad (255)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{dx}{dr} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{dy}{dr} \frac{\partial}{\partial y} \quad (256)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} = \cos \phi \frac{\partial}{\partial x} + \sin \phi \frac{\partial}{\partial y} \quad (257)$$

$$\langle \mathbf{F}_\perp \rangle = -|q|v_0 \left\langle (R \cos \phi \mathbf{e}_x + R \sin \phi \mathbf{e}_y) \left(\cos \phi \frac{\partial}{\partial x} B_z + \sin \phi \frac{\partial}{\partial y} B_z \right) \right\rangle \quad (258)$$

En développant on obtient pour \mathbf{e}_x un terme du type:

$$-|q|v_0 R \mathbf{e}_x \left[\langle \cos^2 \phi \frac{\partial}{\partial x} B_z \rangle + \langle \sin \phi \cos \phi \frac{\partial}{\partial y} B_z \rangle \right] \quad (259)$$

On suppose que $\frac{\partial}{\partial x} B_z$ et $\frac{\partial}{\partial y} B_z$ sont constants sur une orbite, ce qui permet d'écrire:

$$\begin{aligned} \langle \cos^2 \phi \frac{\partial}{\partial x} B_z \rangle &= \frac{\partial}{\partial x} B_z \langle \cos^2 \phi \rangle = \frac{\partial}{\partial x} B_z \frac{1}{2} \\ \langle \sin \phi \cos \phi \frac{\partial}{\partial y} B_z \rangle &= \frac{\partial}{\partial y} B_z \langle \sin \phi \cos \phi \rangle = 0 \end{aligned}$$

puisque les moyennes sur une orbite de $\langle \cos^2 \phi \rangle = 1/2$ et $\langle \sin \phi \cos \phi \rangle = 0$.

En utilisant ces résultats dans l'équation (258) il vient:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{F}_\perp \rangle &= -|q| v_0 \frac{1}{2} R \left[\frac{\partial}{\partial x} B_z \mathbf{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} B_z \mathbf{e}_y \right] \\ &= -|q| v_0 \frac{R}{2} \frac{1}{2B_z} \nabla_\perp B_z^2 = -\frac{\mu_m}{2B_z} \nabla_\perp B_z^2 = -\frac{\mu_m}{2|\mathbf{B}|} \nabla_\perp \mathbf{B}^2 \end{aligned} \quad (260)$$

où la dernière égalité utilise le fait que B_z est la composante dominante de \mathbf{B} ce qui permet d'écrire $B_z^2 \simeq \mathbf{B}^2$. On a donc que

$$\langle \mathbf{F}_\perp \rangle = -\frac{\mu_m}{2} \frac{1}{|\mathbf{B}|} \nabla_\perp \mathbf{B}^2 \quad (261)$$

Cette force perpendiculaire $\langle \mathbf{F}_\perp \rangle$ est constante et va donc donner lieu à une vitesse de dérive:

$$\mathbf{v}_D = \frac{1}{q} \frac{\langle \mathbf{F}_\perp \rangle \wedge \mathbf{B}}{\mathbf{B}^2} = \frac{\mu_m}{2q|\mathbf{B}|^3} (\mathbf{B} \wedge \nabla_\perp \mathbf{B}^2) = \frac{\mu_m}{2q|\mathbf{B}|^3} (\mathbf{B} \wedge \nabla \mathbf{B}^2) \quad (262)$$

puisque la composante parallèle de $\nabla \mathbf{B}^2$, $\nabla_\parallel \mathbf{B}^2$, ne contribue pas à la vitesse de dérive.

La vitesse de dérive due à un gradient de champ magnétique dépend de la charge de la particule: les ions et les électrons dérivent dans des directions opposées.

5.7 Mouvement d'une particule dans un champ magnétique présentant un rayon de courbure R

Soit un champ magnétique dont les lignes de champ ont un rayon de courbure R constant (c.f figure 48).

Deux effets vont se superposer: le premier est celui de la force centrifuge ressentie par le centre de guidage d'une particule lors de son mouvement le long de la ligne de champ. Le deuxième effet provient de la variation du champ B dans la direction radiale.

Soit v_\parallel la vitesse parallèle. La force centrifuge dans le référentiel qui bouge avec le centre de guidage est:

$$\mathbf{F}_c = \frac{mv_\parallel^2}{R} \mathbf{e}_r = \frac{mv_\parallel^2}{R^2} \mathbf{R} \quad (263)$$

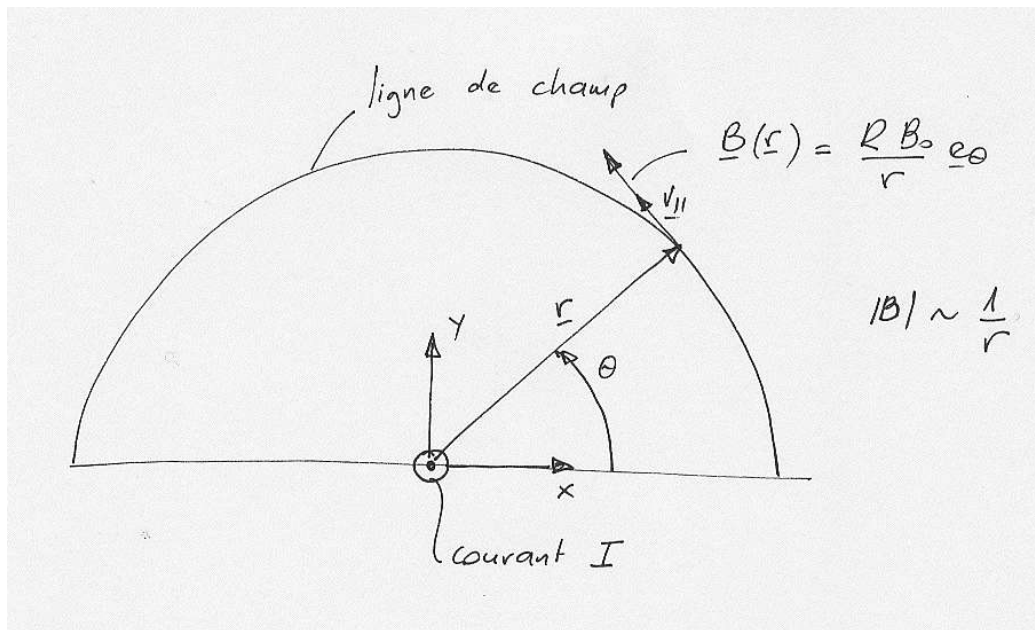


Figure 48: Particule chargée dans un champ magnétique présentant un rayon de courbure. Par exemple dans le cas d'un conducteur rectiligne placé en $r = 0$ portant un courant I .

où \mathbf{e}_r est le vecteur unité selon la direction radiale. \mathbf{F}_c perpendiculaire au champ est constante et va introduire une dérive:

$$\mathbf{v}_{D1} = \frac{1}{q} \frac{\mathbf{F}_c \wedge \mathbf{B}}{B^2} = \frac{mv_{\parallel}^2}{q} \frac{\mathbf{R} \wedge \mathbf{B}}{R^2 B^2} \quad (264)$$

\mathbf{v}_{D1} dépend donc de la charge q et est perpendiculaire à \mathbf{B} et à \mathbf{F}_c . Examinons maintenant l'effet de la variation radiale de \mathbf{B} . Le champ \mathbf{B} décroît radialement comme $1/R$. La dérive perpendiculaire est alors:

$$\mathbf{v}_{D2} = \frac{\mu_m}{2qB^3} (\mathbf{B} \wedge \nabla B^2) \quad (265)$$

$$= \frac{\mu_m}{2B^3 q} \frac{2B^2}{R^2} (\mathbf{R} \wedge \mathbf{B}) \quad (266)$$

$$= \frac{mv_{\perp}^2}{2B^2 q} \frac{\mathbf{R} \wedge \mathbf{B}}{R^2} \quad (267)$$

Pour obtenir (266) nous avons utilisé

$$\nabla B^2 = -2 \frac{B^2}{R^2} \mathbf{R} \quad (268)$$

La dérive totale est donc

$$\mathbf{V}_D = \mathbf{v}_{D1} + \mathbf{v}_{D2} = \frac{m}{q} \frac{1}{R^2 B^2} (\mathbf{R} \wedge \mathbf{B}) \left[v_{\parallel}^2 + \frac{1}{2} v_{\perp}^2 \right] \quad (269)$$

Les deux dérives s'additionnent et dépendent de la charge. Ce résultat est important car il montre qu'on ne peut utiliser un champ purement torique pour confiner le plasma.

Considérons, en effet, un champ purement toroïdal (figure 49). Les ions et les électrons, à cause de la courbure du champ, vont dériver dans les directions opposées. Un champ électrique \mathbf{E} va donc être induit. Ce champ \mathbf{E} , à son tour, va induire une dérive radiale $(\mathbf{E} \wedge \mathbf{B})/B^2$ indépendante de la charge qui amènera à une perte du plasma sur la paroi.

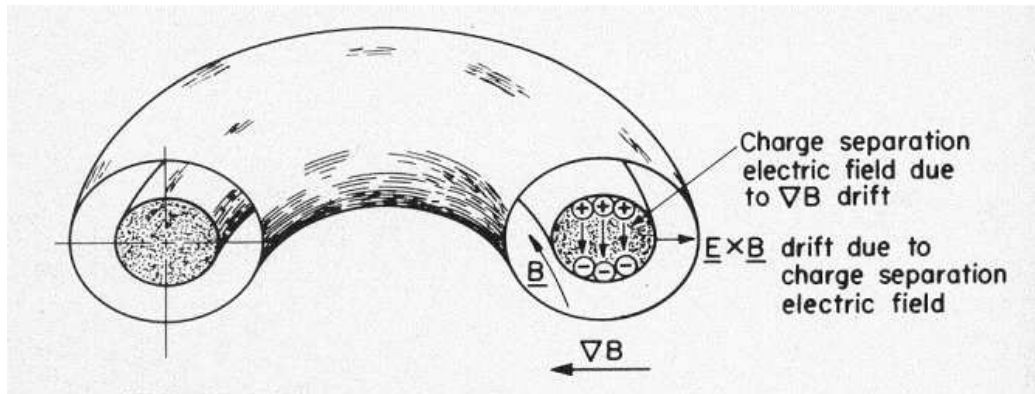


Figure 49: Structure magnétique purement toroïdale montrant les différentes dérives (Tiré de "Principles of Plasma Physics" de Krall et Trivelpiece)

6 Les équations fluides

6.1 Introduction

Considérons un fluide¹⁴ qui se meut à la vitesse \mathbf{u} . Dans ce fluide on considère un volume V qui lui aussi se meut avec \mathbf{u} . Au cours du mouvement \mathbf{u} , les diverses quantités qui caractérisent le fluide changent avec le temps. Ces quantités pour un fluide peuvent être par exemple la densité, la vitesse fluide \mathbf{u} , la pression, etc.

Soit M la masse totale du fluide et \mathbf{P} l'impulsion totale:

$$M = \int \rho dV \quad (270)$$

$$\mathbf{P} = \int \rho \mathbf{u} dV \quad (271)$$

où ρ est la densité (masse/unité de volume). ρ et \mathbf{u} varient dans l'espace et le temps:

$$\rho = \rho(\mathbf{r}, t) \text{ et } \mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \quad (272)$$

La conservation de la masse et de l'impulsion s'écrivent:

$$\frac{d}{dt} M = \frac{d}{dt} \int \rho dV = 0 \quad (273)$$

$$\frac{d}{dt} \mathbf{P} = \frac{d}{dt} \int \rho \mathbf{u} dV = \mathbf{F} \quad (274)$$

où \mathbf{F} est la somme des forces qui s'exerce sur le volume de fluide. Si l'on suppose que le fluide est immergé dans un champ de gravité \mathbf{g} et qu'il y a un terme de pression, la force est donnée par¹⁵

$$F_i = - \int p_{ik} d\Sigma_k + \int \rho g_i dV \quad (275)$$

p_{ik} est le tenseur de pression¹⁶. L'équation (274) devient alors:

$$\frac{d}{dt} P_i = \frac{d}{dt} \int \rho u_i dV = - \int p_{ik} d\Sigma_k + \int \rho g_i dV \quad (276)$$

¹⁴Notez que la vitesse \mathbf{u} est la vitesse d'un élément du fluide. Ce n'est pas la vitesse des molécules ou des atomes (ou, dans le cas d'un plasma, la vitesse des particules chargées) qui composent le milieu.

¹⁵Nous utilisons la convention de la sommation sur les indices répétés.

¹⁶Attention à la notation: le symbole p correspond à la pression et \mathbf{P} à la quantité de mouvement

Nous allons maintenant transformer les équations (273) et (276) dans une forme différentielle. Les membres de gauche de ces équations sont du type

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} f(t) dV \quad (277)$$

L'évaluation de la variation temporelle de $\int_{V(t)} f(t) dV$ fait apparaître deux termes

- l'un dû à la variation temporelle de f , soit $\int \frac{\partial}{\partial t} f dV$
- l'autre dû au déplacement de la surface S qui entoure le volume V (voir figure 50): $\int f u_i d\Sigma_i = \int f(\mathbf{u} \cdot d\Sigma)$

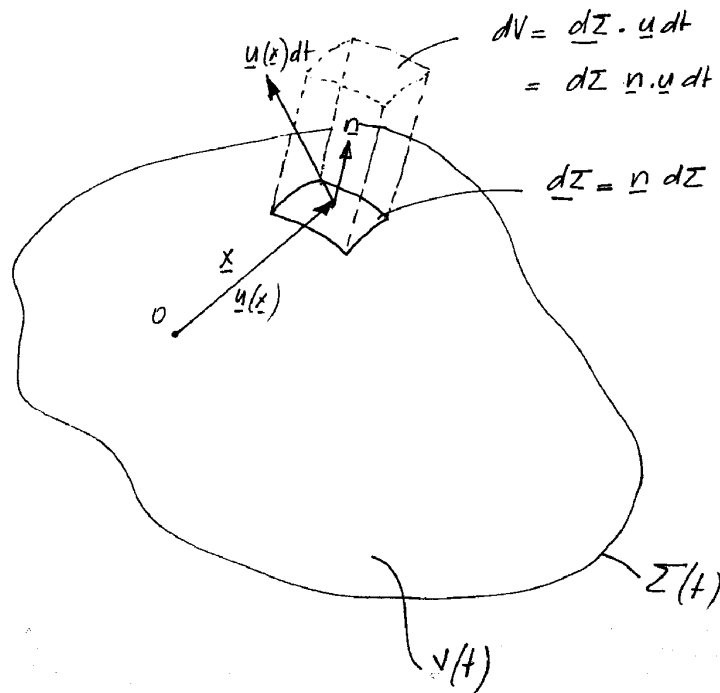


Figure 50: Déplacement de la surface

Donc

$$\frac{d}{dt} \int f dV = \int_V \frac{\partial}{\partial t} f dV + \int_{\Sigma} f(\mathbf{u} \cdot d\Sigma)$$

Soit en utilisant le théorème de la divergence pour évaluer l'intégrale de surface:

$$\frac{d}{dt} \int f dV = \int_V \frac{\partial}{\partial t} f dV + \int_V \nabla \cdot (f\mathbf{u}) dV \quad (278)$$

En utilisant l'expression (278) dans l'équation (273), on obtient

$$\frac{d}{dt} \int \rho dV = \int \frac{\partial}{\partial t} \rho dV + \int \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) dV = 0 \quad (279)$$

Le volume V étant arbitraire, l'équation (279) n'est satisfaite que si:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (280)$$

L'équation (280) est l'équation de continuité.

Transformons maintenant l'équation (276)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int \rho u_i dV &= \int \frac{\partial}{\partial t} (\rho u_i) dV + \int \nabla \cdot (\rho u_i \mathbf{u}) dV \\ &= - \int p_{ik} d\Sigma_k + \int \rho g_i dV \\ &= - \int \frac{\partial p_{ik}}{\partial x_k} dV + \int \rho g_i dV \end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\rho u_i) + \sum_k \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho u_i u_k) &= - \sum_k \frac{\partial}{\partial x_k} p_{ik} + \rho g_i \\ &= u_i \frac{\partial}{\partial t} \rho + \rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_k \rho u_k \frac{\partial}{\partial x_k} u_i + u_i \sum_k \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho u_k) \\ &= \rho \frac{\partial}{\partial t} u_i + \sum_k \rho u_k \frac{\partial}{\partial x_k} u_i + u_i \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_k \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho u_k) \right] \\ &= \rho \left[\frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_k u_k \frac{\partial}{\partial x_k} u_i \right] = - \sum_k \frac{\partial}{\partial x_k} p_{ik} + \rho g_i \quad (281) \end{aligned}$$

Notons que le membre de gauche n'est autre que la composante i de l'expression vectorielle

$$\rho \left[\frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \right] \mathbf{u}$$

Dans la plupart des cas que nous traiterons, nous pouvons considérer que le tenseur de pression p_{ik} se réduit à un tenseur diagonal $p_{ik} = p \delta_{ik}$ avec $\delta_{ik} = 0$ si $i \neq k$ et $\delta_{ik} = 1$ si $i = k$. L'équation (281) s'écrit alors:

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right] = -\nabla p + \rho \mathbf{g} \quad (282)$$

C'est l'**équation de Newton**. Notez qu'à partir de maintenant le symbole p désigne la pression.

Notons que l'opérateur,

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \right]$$

est la dérivée convective

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \quad (283)$$

L'équation de continuité et l'équation de Newton s'écrivent alors

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho(\nabla \cdot \mathbf{u}) = 0 \quad (284)$$

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{1}{\rho}[-\nabla p + \rho\mathbf{g}] \quad (285)$$

Pour un fluide, les deux équations de continuité et de Newton ne sont toutefois pas suffisantes pour déterminer l'évolution des perturbations. En effet, il y a plus d'inconnues que d'équations. On a une équation supplémentaire, l'**équation d'état**:

$$\frac{d}{dt}(p\rho^{-\gamma}) = 0 \quad (286)$$

où $\gamma = 1$ indique un processus isotherme, et $\gamma = 5/3$ un processus adiabatique¹⁷ et ρ est la densité de masse. A la place de l'équation (510), on peut prendre une autre équation comme

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (287)$$

qui indique que le fluide est incompressible.

Il est important de noter que le choix de l'équation d'état ((510), (287) ou autres!) ne peut être déduit de la théorie fluide. Nous devons utiliser des arguments physiques (comme par exemple dire que le fluide est incompressible) pour pouvoir choisir une équation d'état bien définie. Ce genre de difficulté n'existe pas si nous faisons une théorie cinétique du milieu.

Si l'on désire décrire le plasma comme un fluide, il faut tenir compte du fait que le plasma est constitué de particules chargées: le fluide peut donc être influencé par des champs électriques et magnétiques. L'équation de Newton sans terme de collision est donc modifiée comme suit:

$$nm \frac{d\mathbf{u}}{dt} = nq[\mathbf{E} + \mathbf{u} \wedge \mathbf{B}] - \nabla p + nm\mathbf{g} \quad (288)$$

¹⁷Pour un processus adiabatique, γ vaut $\frac{\text{Nombre de degrés de liberté} + 2}{\text{Nombre de degrés de liberté}}$ où le nombre de degrés de liberté se réfère au nombre de degrés de liberté du phénomène considéré.

où n est appelé densité (\equiv nombre de particules/unité de volume) et m la masse d'une particule.

L'équation de continuité peut aussi s'écrire

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (n\mathbf{u}) = 0 \quad (289)$$

Pour un plasma composé d'ions et d'électrons (indice k) nous avons alors:

$$\frac{\partial n_k}{\partial t} + \nabla \cdot (n_k \mathbf{u}_k) = 0 \quad k = i, e \quad (290)$$

$$n_k m_k \left[\frac{\partial \mathbf{u}_k}{\partial t} + (\mathbf{u}_k \cdot \nabla) \mathbf{u}_k \right] = -\nabla p_k + n_k q_k (\mathbf{E} + \mathbf{u}_k \wedge \mathbf{B}) + \sum_{k \neq l} \mathbf{R}_{kl}, \quad k = i, e \quad (291)$$

Le terme \mathbf{R}_{kl} tient compte des collisions coulombiennes entre différentes espèces avec:

$$\mathbf{R}_{kl} = n_k m_k \nu_{kl} (\mathbf{u}_l - \mathbf{u}_k) = -\mathbf{R}_{lk}, \quad (292)$$

avec ν_{kl} étant la fréquence de collision entre les espèces k et l . On avait vu que $\nu \sim T^{-3/2}$, avec T étant la température du plasma. Dans l'étude des ondes dans le modèle à deux fluides, que l'on verra dans le chapitre sur les ondes dans un plasma non-magnétisé, on va négliger ce terme ($\mathbf{R}_{kl} = 0$) ce qui équivaut de considérer un plasma non-collisionnel (plasma chaud, T élevée).

Equation d'état :

$$\frac{d(p_k n_k^{-\gamma_k})}{dt} = 0, \quad k = i, e \quad (293)$$

Equations de Maxwell¹⁸:

$$\nabla \wedge \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (294)$$

$$\nabla \wedge \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (295)$$

La densité de courant \mathbf{j} est définie par:

$$\mathbf{j} = \sum_k q_k n_k \mathbf{u}_k. \quad (296)$$

¹⁸Nous serons amenés à utiliser l'équation de Poisson dans certains cas pour simplifier les calculs.

Pour un plasma avec $Z = 1$ (par ex. pour un plasma d'hydrogène) on a $\mathbf{j} = e(n_i \mathbf{u}_i - n_e \mathbf{u}_e)$.

La densité de courant $j(\mathbf{x}, t)$ et la densité de charge $\rho_{el}(\mathbf{x}, t)$ sont les termes de sources des équations de Maxwell.

Qu'en est-il des deux autres équations de Maxwell faisant intervenir la divergence? Elles sont obtenues à partir des équations en rotationnel.

$$\nabla \cdot [\nabla \wedge \mathbf{B}] = 0 = \nabla \cdot \left[\mu_0 \mathbf{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right] \quad (297)$$

La divergence de \mathbf{j} est obtenue à partir de l'équation de continuité:

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = \sum_k \nabla \cdot (n_k q_k \mathbf{u}_k) = - \sum_k \frac{\partial}{\partial t} (n_k q_k) = - \frac{\partial \rho_{el}}{\partial t}$$

avec la définition de la densité de charge ρ_{el} :

$$\rho_{el}(\mathbf{x}, t) = \sum_k n_k(\mathbf{x}, t) q_k$$

En remplaçant dans l'équation (297), on obtient immédiatement:

$$\frac{1}{\varepsilon_0} \frac{\partial \rho_{el}}{\partial t} = \frac{\partial(\nabla \cdot \mathbf{E})}{\partial t}$$

Avec un choix de la constante d'intégration à 0 nous retrouvons l'équation de Poisson:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_{el}}{\varepsilon_0} \quad (298)$$

En opérant de même avec la deuxième équation en rotationnel on trouve:

$$\frac{\partial(\nabla \cdot \mathbf{B})}{\partial t} = 0$$

En choisissant la constante d'intégration à 0, on retrouve:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (299)$$

Les deux équations en divergence peuvent donc être dérivées des équations en rotationnel avec un choix de condition initiale.

En physique des plasmas dans le modèle dit à deux fluides (un fluide d'ions et un fluide d'électrons) les équations sont donc les équations de continuité (513) et de Newton (291) complétées par une équation d'état appropriée,

et les équations de Maxwell¹⁹ (305),(306) avec la définition de la densité de courant \mathbf{j} (296).

Une autre remarque importante: les équations de Maxwell sont linéaires. Cependant les équations de continuité, de Newton et l'équation d'état sont non linéaires (termes: $n\mathbf{u}$, $(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}$, ...). C'est ce dernier point qui rend l'étude des phénomènes dans un plasma (et en général dans un milieu) extrêmement compliquée.

¹⁹Notez que dans certains cas (**ondes dites longitudinales ou encore appelées ondes électrostatiques**) il peut être plus simple d'utiliser l'équation de Poisson. Ces cas seront discutés lorsqu'ils se présenteront (c.f. Ondes dans un plasma non-magnétisé, modèle à deux fluides).

7 Ondes dans un plasma dans le modèle à deux fluides

Nous allons considérer les ondes dans un plasma en utilisant le modèle à deux fluides. Nous supposons que le plasma est formé d'ions (indice i) une fois chargés et d'électrons (indice e). Les équations de base sont:

Equations fluides:

$$\frac{\partial n_k}{\partial t} + \nabla \cdot (n_k \mathbf{u}_k) = 0 \quad k = i, e \quad (300)$$

$$n_k m_k \left[\frac{\partial \mathbf{u}_k}{\partial t} + (\mathbf{u}_k \cdot \nabla) \mathbf{u}_k \right] = -\nabla p_k + n_k q_k (E + \mathbf{u}_k \wedge \mathbf{B}) + \sum_{k \neq l} \mathbf{R}_{kl}, \quad k = i, e \quad (301)$$

Le terme \mathbf{R}_{kl} tient compte des collisions coulombiennes entre différentes espèces avec:

$$\mathbf{R}_{kl} = n_k m_k \nu_{kl} (\mathbf{u}_l - \mathbf{u}_k) = -\mathbf{R}_{lk}, \quad (302)$$

avec ν_{kl} étant la fréquence de collision entre l'espèce k et l . On avait vu que $\nu \sim T^{-3/2}$, avec T étant la température du plasma. Dans l'étude des ondes faite dans ce chapitre on va négliger ce terme ($\mathbf{R}_{kl} = 0$) ce qui se justifie par le fait que, comme on le verra, les échelles de temps typiques des ondes supportées par le plasma sont en général beaucoup plus rapides que les échelles de temps collisionnelles pour des plasmas chauds, c.à d. avec des températures élevées.

Avec cette approximation ($\mathbf{R}_{kl} = 0$) on parle de plasma non-collisionnel et l'équation de Newton devient:

$$n_k m_k \left[\frac{\partial \mathbf{u}_k}{\partial t} + (\mathbf{u}_k \cdot \nabla) \mathbf{u}_k \right] = -\nabla p_k + n_k q_k (\mathbf{E} + \mathbf{u}_k \wedge \mathbf{B}), \quad k = i, e \quad (303)$$

Equation d'état :

$$\frac{d(p_k n_k^{-\gamma_k})}{dt} = 0, \quad k = i, e \quad (304)$$

Equations de Maxwell²⁰:

$$\nabla \wedge \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (305)$$

²⁰Nous serons amenés à utiliser l'équation de Poisson dans certains cas pour simplifier les calculs.

$$\nabla \wedge \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (306)$$

avec $\mathbf{j} = \sum_k q_k n_k \mathbf{u}_k$. Pour un plasma d'hydrogène on a $\mathbf{j} = e(n_i \mathbf{u}_i - n_e \mathbf{u}_e)$.

La densité de courant $j(\mathbf{x}, t)$ et la densité de charge $\rho_{el}(\mathbf{x}, t)$ sont les termes de sources des équations de Maxwell.

Le but est l'étude des diverses ondes qui peuvent se propager dans le plasma. Pour cela en principe nous devons résoudre les équations, 300,303-306, ci-dessus. Selon les problèmes, nous ferons des approximations de ces équations. Naturellement, nous devons justifier ces approximations et vérifier que les résultats obtenus sont consistants avec ces approximations²¹. On va utiliser les différentes approximations dans l'études des ondes dans un plasma non-magnétisé.

Mais qu'appelons nous " étude des ondes " ? Nous entendons par là l'étude des perturbations du milieu qui ont une dépendance spatio-temporelle et qui s'y propagent. Nous supposons qu'elles ont une fréquence ω et un vecteur d'onde \mathbf{k} . Nous devons déterminer:

- la relation de dispersion $\omega = \omega(\mathbf{k})$;
- les quantités qui sont perturbées;
- la polarisation de l'onde, c'est-à-dire la direction du champ \mathbf{E} par rapport à \mathbf{k}

Les équations fluides étant non linéaires, nous allons les linéariser et de plus, nous allons simplifier le problème en passant de l'espace (\mathbf{x}, t) à l'espace de Fourier (ω, \mathbf{k}) .

²¹Pour l'équation de Newton, en fonction de l'échelle temporelle caractéristique ($\tau \sim 1/\omega$) de l'onde que l'on étudie on peut distinguer les situations suivantes:

1. Echelle de temps rapide:
on peut supposer certaines espèces immobiles (typiquement les ions).
2. Echelle de temps moyenne:
on inclus les effets d'inertie pour toutes les espèces.
3. Echelle de temps lentes:
on peut supposer certaines espèces proches de l'équilibre thermodynamique ce qui signifie qu'elles obéissent à une distribution de Boltzmann (typiquement pour les électrons dans leur mouvement || aux lignes de champ magnétique).

7.1 Technique mathématique

On va utiliser une expansion en modes propres (superposition d'ondes planes), ce qui correspond de considérer dans un milieu infini toute quantité physique ($n(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, ...) dans l'espace de Fourier.

La transformée de Fourier (TF) d'une quantité $\mathbf{g}(\mathbf{x}, t)$ est définie comme:

$$\tilde{\mathbf{g}}(\omega, \mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^3x \int dt \mathbf{g}(\mathbf{x}, t) e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})}, \quad (307)$$

où $\tilde{\mathbf{g}}$ est un champ vectoriel avec des composantes en général complexes. Puisque $\mathbf{g}(\mathbf{x}, t)$ représente une grandeur physique (dans le cas d'un champ vectoriel, les composantes sont réelles), $\tilde{\mathbf{g}}(\omega, \mathbf{k})$ doit satisfaire une condition de réalité:

$$\tilde{\mathbf{g}}(\omega, \mathbf{k}) = \tilde{\mathbf{g}}^*(-\omega, -\mathbf{k}) \quad (308)$$

où * est le complexe conjugué.

La transformée inverse est donnée par:

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}, t) = \int d^3k \int d\omega \tilde{\mathbf{g}}(\mathbf{k}, \omega) e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})}, \quad (309)$$

qui est en fait une superposition d'ondes planes d'amplitude $\tilde{\mathbf{g}}(\omega, \mathbf{k})$.

Pour une onde plane monochromatique de fréquence angulaire ω_0 et de vecteur d'onde \mathbf{k}_0 :

$$\tilde{\mathbf{g}}(\omega, \mathbf{k}) = \tilde{\mathbf{A}}(\omega_0, \mathbf{k}_0) \delta(\omega - \omega_0) \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) \quad (310)$$

ce qui permet d'écrire $\mathbf{g}(\mathbf{x}, t)$ comme:

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}, t) = \text{Re} \left[\tilde{\mathbf{A}}(\omega_0, \mathbf{k}_0) e^{i(\omega_0 t - \mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{x})} \right]. \quad (311)$$

La TF est une opération linéaire. L'idée de base de décrire les grandeurs physiques dans l'espace de Fourier est qu'on décompose un problème compliqué, $\mathbf{g}(\mathbf{x}, t)$, en plusieurs problèmes simples pour ensuite recombinaison la solution des problèmes simples (TF inverse) ce qui permet de trouver la solution complète. Cette procédure implique que le problème à résoudre doit être linéaire et donc une linéarisation des équations fluides.

Prenons comme exemple l'équation de continuité:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (n\mathbf{u}) = 0, \quad (312)$$

où $n \equiv n(\mathbf{x}, t)$ et $\mathbf{u} \equiv \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$. Le terme non-linéaire dans l'équation de continuité est donné par le produit $n\mathbf{u}$.

La procédure de linéarisation et passage dans l'espace de Fourier est la suivante:

1. On choisit une condition d'équilibre, qui, dans un plasma infini homogène peut être donnée par:

$$n_0(\mathbf{x}) = n_0 \quad (\text{uniforme}), \quad \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) = 0. \quad (313)$$

2. On considère une petite perturbation de l'équilibre:

$$n = n_0 + n_1(\mathbf{x}, t), \quad \text{avec,} \quad \left| \frac{n_1}{n_0} \right| \ll 1. \quad (314)$$

Puisque la vitesse fluide $\mathbf{u}_0(\mathbf{x})$ est nulle, la vitesse $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ s'exprime comme:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}_1(\mathbf{x}, t). \quad (315)$$

3. Linéarisation — on garde uniquement les termes de premier ordre pour obtenir l'équation de continuité linéarisée:

$$\frac{\partial(n_0 + n_1)}{\partial t} + \nabla \cdot ((n_0 + n_1)\mathbf{u}_1) = 0 \quad \implies \quad \frac{\partial n_1}{\partial t} + n_0 \nabla \cdot \mathbf{u}_1 = 0. \quad (316)$$

4. On considère maintenant l'expansion en modes normaux, c.à d. que l'on considère la TF des grandeurs perturbées.:

$$n_1(\mathbf{x}, t) = \int d^3k \int d\omega \tilde{n}_1(\mathbf{k}, \omega) e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} \quad (317)$$

et de même pour $\mathbf{u}_1(\mathbf{x}, t)$.

En utilisant ces expressions, l'équation de continuité peut s'écrire comme:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \int d^3k \int d\omega \tilde{n}_1(\mathbf{k}, \omega) e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} \right\} \\
& + n_0 \nabla \cdot \left\{ \int d^3k \int d\omega \tilde{\mathbf{u}}_1(\mathbf{k}, \omega) e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} \right\} \\
& = \int d^3k \int d\omega [i\omega \tilde{n}_1(\mathbf{k}, \omega)] e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} \\
& + n_0 \int d^3k \int d\omega [-i\mathbf{k} \cdot \tilde{\mathbf{u}}_1(\mathbf{k}, \omega)] e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} = 0. \quad (318)
\end{aligned}$$

On remarque que formellement, en passant dans l'espace de Fourier on peut faire les substitutions suivantes²²:

$$\nabla \cdot \rightarrow -i\mathbf{k} \cdot, \quad (319)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow i\omega. \quad (320)$$

Dans notre exemple l'équation de continuité devient:

$$-i\omega \tilde{n}_1 + in_0 \mathbf{k} \cdot \tilde{\mathbf{u}}_1 = 0. \quad (321)$$

Dans ce qui suit, pour alléger la notation, on omettra le tilde.

On remarque que cette procédure à permis de transformer une équation linéaire aux dérivées partielles en une équation algébrique pour les quantités perturbées décrites dans l'espace de Fourier .

En appliquant la procédure décrite avant aux système d'équations 300,303-306 on transforme se système d'équations aux dérivées partielles en un système d'équations algébriques. On montera que:

$$\mathbf{j}_1(\omega, \mathbf{k}) = \underline{\underline{\sigma}}(\omega, \mathbf{k}) \mathbf{E}_1(\omega, \mathbf{k}) \quad (322)$$

où $\underline{\underline{\sigma}}(\omega, \mathbf{k})$ est le tenseur de conductivité.

La solution du système d'équations dans l'espace de Fourier permettra de calculer les grandeurs suivantes:

- La relation de dispersion: $\omega = \omega(\mathbf{k})$.

²²Si on avait d'autres opérateurs de dérivation spatiales comme le rotationnel ou le gradient on aurait respectivement les substitutions suivantes: $\nabla \wedge \rightarrow -i\mathbf{k} \wedge, \nabla \rightarrow -i\mathbf{k}$

- La vitesse de phase: $\mathbf{v}_{\text{ph}} = \frac{\omega}{k} \frac{\mathbf{k}}{k}$
- La vitesse de groupe: $\mathbf{v}_{\text{g}} = \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}}$
- La polarisation de l'onde: p.ex. la direction du champ perturbé $\mathbf{E}_1(\omega, \mathbf{k})$ par rapport au vecteur d'onde \mathbf{k} .
- Les quantités perturbées: $\mathbf{E}_1(\omega, \mathbf{k}), \mathbf{B}_1(\omega, \mathbf{k}), n_1(\omega, \mathbf{k}), \mathbf{u}_1(\omega, \mathbf{k}), p_1(\omega, \mathbf{k}), \dots$

Rappelons brièvement les définitions de vitesse de phase et de groupe.

7.2 Vitesse de phase et de groupe

7.2.1 Vitesse de phase

$$\mathbf{v}_{\text{ph}} = \frac{\omega}{k} \frac{\mathbf{k}}{k}. \quad (323)$$

La vitesse de phase **peut** être telle que $|\mathbf{v}_{\text{ph}}| \geq c$, puisque \mathbf{v}_{ph} ne transporte pas de l'énergie, de l'information.

Exemple:

- Onde électromagnétique (EM) dans le vide:
La relation de dispersion est : $\omega = ck$, avec c étant la vitesse de la lumière.
d'où la vitesse de phase²³: $v_{\text{ph}} = c$.
- Onde sonore (c.f. exercices) $v_{\text{ph}} = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_0}}$, avec γ le coefficient adiabatique, p_0 la pression d'équilibre et ρ_0 la densité de masse.

7.2.2 Vitesse de groupe

$$\mathbf{v}_{\text{g}} = \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}}. \quad (324)$$

La vitesse de phase **ne peut pas** être $|\mathbf{v}_{\text{g}}| \geq c$, puisque l'énergie, l'information se propagent à la vitesse de groupe.

²³Une onde non-dispersive dans un milieu infini devient en général dispersive dans un milieu fini comme par exemple une onde EM dans un guide d'onde vide.

Démonstration dans le cas uni-dimensionnel:

Phénomène de battement entre deux ondes planes de même amplitude E_0 , mais de fréquence ω_1, ω_2 proches.

Ces deux ondes satisfont la relation de dispersion $\omega = \omega(\mathbf{k})$. A chacune des deux fréquences correspond un vecteur d'onde:

$$\omega_1, \quad k_1 = k_0 - \Delta k/2,$$

$$\omega_2, \quad k_2 = k_0 + \Delta k/2,$$

où k_0 est la moyenne entre k_1 et k_2 avec $\omega_0 = \omega(k_0)$.

En faisant un développement limité autour de k_0 il vient:

$$\omega_1(k_1) = \omega(k_0) - \left. \frac{\partial \omega}{\partial k} \right|_0 \Delta k/2 = \omega_0 - v_g \Delta k/2, \quad (325)$$

$$\omega_2(k_2) = \omega(k_0) + \left. \frac{\partial \omega}{\partial k} \right|_0 \Delta k/2 = \omega_0 + v_g \Delta k/2, \quad (326)$$

En supposant une polarisation linéaire selon \mathbf{e}_x et un vecteur d'onde $\mathbf{k} = k\mathbf{e}_x$ (cas d'une onde électrostatique), chacune des deux ondes donne lieu à un champ électrique:

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{e}_x E_0 \left[e^{i(\omega_1 t - k_1 x)} \right], \quad (327)$$

$$\mathbf{E}_2 = \mathbf{e}_x E_0 \left[e^{i(\omega_2 t - k_2 x)} \right]. \quad (328)$$

Avec la superposition des deux ondes planes donnant un champ électrique total:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\text{tot}} &= \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 = \mathbf{e}_x E_0 \left[e^{i(\omega_1 t - k_1 x)} + e^{i(\omega_2 t - k_2 x)} \right] \\ &= \mathbf{e}_x E_0 e^{i(\omega_0 t - k_0 x)} \left[e^{i(v_g \Delta k/2 t - \Delta k/2 x)} + e^{-i(v_g \Delta k/2 t - \Delta k/2 x)} \right]. \end{aligned}$$

Ce qui se transforme en:

$$\mathbf{E}_{\text{tot}} = \mathbf{e}_x E_0 e^{i(\omega_0 t - k_0 x)} 2 \cos \left[\Delta k/2 (v_g t - x) \right]. \quad (329)$$

L'équation 329 correspond à la propagation d'un paquet d'onde avec une enveloppe qui se propage à la vitesse de groupe v_g . On peut généraliser ceci au cas tri-dimensionnel et pour une superposition infinie d'ondes planes ce qui permet de retrouver l'équation 324.

8 Etudes de quelques cas simple dans un plasma non-magnétisé, $\mathbf{B}_0 = 0$, modèle à deux fluides.

Nous commencerons par définir un état d'équilibre qui décrit le milieu dans lequel les ondes vont se propager. Nous choisissons cet équilibre comme étant défini par:

$$\begin{aligned}n_{e,0} &= n_{i,0} = n_0 \\ \mathbf{u}_{e,0} &= \mathbf{u}_{i,0} = \mathbf{0} \\ \mathbf{E}_0 &= \mathbf{B}_0 = \mathbf{0}\end{aligned}$$

Selon les cas nous choisirons une pression p_k nulle ou différente de 0.

Les quantités décrivant l'onde sont considérées comme de faibles perturbations de l'équilibre, ce qui nous amènera d'utiliser la technique mathématique décrite auparavant (c.f. 7.1).

8.1 Ondes électromagnétiques transverses

Nous supposerons que la fréquence de l'onde est telle que seuls les électrons peuvent réagir à l'onde. Les ions ne jouent aucun rôle dans la propagation de l'onde. De plus nous allons négliger le terme de pression p_e dans l'équation de Newton, ce qui rend superflue l'équation d'état. Cette dernière hypothèse est appelée hypothèse du **plasma froid (la pression \mathbf{p} est nulle, $\mathbf{p} = \mathbf{0}$)**.

L'onde est **transverse**, c'est-à-dire que **le champ \mathbf{E} est perpendiculaire au vecteur d'onde \mathbf{k}** .

Nous avons donc:

$$\begin{aligned}n_e &= n_0 + \varepsilon n_{e1} \\ \mathbf{u}_e &= \varepsilon \mathbf{u}_{e1} \\ \mathbf{E} &= \varepsilon \mathbf{E}_1 \\ \mathbf{B} &= \varepsilon \mathbf{B}_1\end{aligned}$$

La quantité ε est juste là pour nous faciliter le développement en série de perturbations et nous permettre de ne retenir que les termes au premier ordre

en ε^{24} . En remplaçant les quantités n_e , \mathbf{u}_e , \mathbf{E} et \mathbf{B} dans les équations de base et en ne gardant que les termes ne contenant que ε , nous avons:

$$\frac{\partial n_{e1}}{\partial t} + n_0 \nabla \cdot \mathbf{u}_{e1} = 0 \quad (330)$$

$$n_0 m_e \frac{\partial \mathbf{u}_{e1}}{\partial t} = -en_0 \mathbf{E}_1 \quad (331)$$

$$\nabla \wedge \mathbf{E}_1 = \frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial t} \quad (332)$$

$$\nabla \wedge \mathbf{B}_1 = \mu_0(-en_0 \mathbf{u}_{e1}) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (333)$$

On passe ensuite dans l'espace de Fourier en faisant les substitutions décrites auparavant ²⁵.

L'onde étant transverse (**k est perpendiculaire à E**), en utilisant l'équation de Poisson nous avons:

$$-\varepsilon_0 i \mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_1 = -n_{e1} e = 0 \quad (334)$$

Il n'y a pas de perturbation de densité associée à l'onde électromagnétique transverse ($n_{e1} = 0$) et l'équation de continuité ne nous est pas utile.

Les équations 331 à 333 donnent:

$$i\omega \mathbf{u}_{e1} = -\frac{e}{m_e} \mathbf{E}_1 \quad (335)$$

$$i \mathbf{k} \wedge \mathbf{E}_1 = i\omega \mathbf{B}_1 \quad (336)$$

$$-i \mathbf{k} \wedge \mathbf{B}_1 = -\mu_0 n_0 e \mathbf{u}_{e1} + \frac{1}{c^2} i\omega \mathbf{E}_1 \quad (337)$$

En combinant les équations 335 à 337 nous arrivons à l'équation suivante:

$$\mathbf{k} \wedge (\mathbf{k} \wedge \mathbf{E}_1) = \frac{1}{c^2} \left(\frac{n_0 e^2}{\varepsilon_0 m_e} - \omega^2 \right) \mathbf{E}_1$$

$$(\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_1) \mathbf{k} - k^2 \mathbf{E}_1 = \frac{1}{c^2} \left(\frac{n_0 e^2}{\varepsilon_0 m_e} - \omega^2 \right) \mathbf{E}_1$$

²⁴Il ne faut pas confondre cet ε qui est simplement utilisé pour indiquer le développement en série de perturbation avec la fonction diélectrique relative $\varepsilon(\omega, k)$.

²⁵On rappelle que l'utilisation des opérateurs ci-dessus signifie que les grandeurs perturbées sont décrites dans l'espace de Fourier. Dans les équations 334 à 337, les grandeurs perturbées dépendent de ω et \mathbf{k} [p.ex. $\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_1(\omega, k)$] et pas de t et \mathbf{x} comme dans les équations 330 à 333 où $\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_1(t, x)$.

$$\mathbf{E}_1 \left(k^2 c^2 + \frac{n_0 e^2}{\varepsilon_0 m_e} - \omega^2 \right) = 0 \quad (338)$$

Dans l'équation 338, pour éviter la solution triviale $\mathbf{E}_1 = 0$, il faut que le facteur multiplicatif soit nul, c'est-à-dire:

$$\omega^2 = \omega_{pe}^2 + k^2 c^2 \quad (339)$$

avec

$$\omega_{pe}^2 = \frac{n_0 e^2}{\varepsilon_0 m_e} \quad (340)$$

L'équation 339 est la relation de dispersion des ondes électromagnétiques transverses dans un plasma. ω_{pe} est appelé fréquence de plasma électronique:

$$\omega_{pe} = \sqrt{\frac{n_0 e^2}{\varepsilon_0 m_e}} \quad (341)$$

Pour résumer, l'onde électromagnétique transverse dans un plasma a les caractéristiques suivantes:

Polarisation: $\mathbf{E}_1 \perp \mathbf{k}$

Relation de dispersion: $\omega^2 = \omega_{pe}^2 + k^2 c^2$

Quantités perturbées: \mathbf{u}_{e1} , \mathbf{E}_1 , \mathbf{B}_1

\mathbf{u}_{e1} parallèle à \mathbf{E}_1 ; $\mathbf{E}_1 \perp \mathbf{B}_1$.

Toutes les quantités perturbées peuvent être exprimées en fonction de \mathbf{E}_1 .

Pas de perturbation de densité n_{e1} .

Les ions ne sont pas affectés par l'onde. En effet en examinant la relation de dispersion (équation 339 et figure 51) nous voyons que l'onde a une fréquence supérieure à ω_{pe} , fréquence telle que le mouvement des ions n'est pas affecté à cause de leur inertie : selon l'équation 335, la vitesse fluide \mathbf{u}_{i1} est proportionnelle à $1/\omega m_i$, c'est à dire proportionnelle à m_e/m_i , quantité petite. Si nous avons tenu compte des ions la relation de dispersion 339 serait modifiée par l'ajout du terme $\omega_{pi}^2 = \frac{n_0 e^2}{\varepsilon_0 m_i}$, pour devenir:

$$\omega^2 = (\omega_{pe}^2 + \omega_{pi}^2) + k^2 c^2$$

Il est clair que l'on peut négliger ω_{pi} devant ω_{pe} .

Discussion

Fréquence de coupure

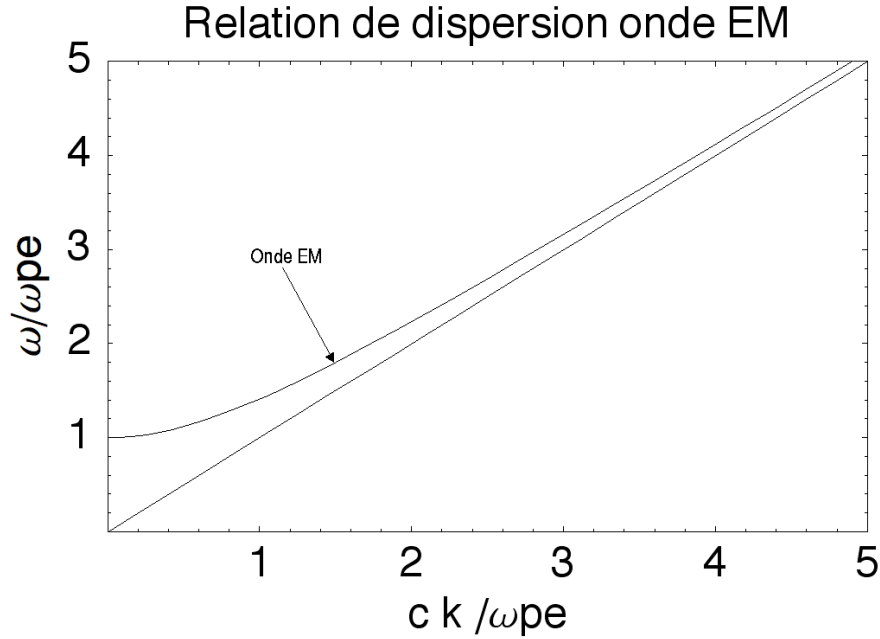


Figure 51: Relation de dispersion des ondes électromagnétiques transverses dans un plasma non magnétisé froid. L'axe vertical est ω/ω_{pe} et l'axe horizontal kc/ω_{pe} .

Selon la relation de dispersion 339, pour $k \geq 0$, la fréquence est plus grande ou égale à ω_{pe} (voir figure 51). Dit autrement, il n'y a pas d'onde qui se propage en dessous de la fréquence de plasma ω_{pe} .

ω_{pe} est fréquence de coupure pour les ondes électromagnétiques transverses dans un plasma non magnétisé.

Vitesse de groupe et vitesse de phase

La vitesse de phase v_{ph} est:

$$v_{ph} = \frac{\omega}{k} = \frac{\sqrt{\omega_{pe}^2 + k^2 c^2}}{k} = c \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 - \omega_{pe}^2}} > c \quad (342)$$

La vitesse de phase 342 est parallèle à \mathbf{k} et sa valeur supérieure à c . Pour ω tendant vers l'infini, la vitesse de phase tend vers c .

La vitesse de groupe v_g est:

$$v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k} = \frac{\partial \sqrt{\omega_{pe}^2 + k^2 c^2}}{\partial k} \quad (343)$$

$$v_g = c \frac{1}{\sqrt{\frac{\omega_{pe}^2}{k^2 c^2} + 1}} = c \sqrt{1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}} < c$$

La vitesse de groupe est inférieure à c , comme il se doit. Elle est nulle pour $\omega = \omega_{pe}$, fréquence de coupure.

Nous définissons l'indice n comme:

$$n = \frac{kc}{\omega} \quad (344)$$

Selon les relations constitutives de l'électrodynamique, nous avons:

$$n = \varepsilon^{1/2} \quad (345)$$

où $\varepsilon(\omega, k)$ est la fonction diélectrique. En insérant l'expression 342 dans 345 nous trouvons la fonction diélectrique $\varepsilon(\omega, k)$ correspondant à un plasma où seuls les électrons sont impliqués:

$$\varepsilon(\omega, k) = \frac{\omega^2 - \omega_{pe}^2}{\omega^2} = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \quad (346)$$

ε tend vers 1 lorsque ω tend vers l'infini. Le plasma se comporte comme le vide à très haute fréquence car les électrons (d'une manière générale les particules), à cause de leur inertie, n'arrivent plus à " suivre " le mouvement causé par le champ électrique \mathbf{E}_1 .

Notons que l'expression 346 est la même que celle vue au cours de Physique du solide lorsque nous étudions les propriétés électriques d'un conducteur. Les électrons de conduction du métal peuvent librement bouger alors que les ions sont immobiles aux noeuds du réseau cristallin.

Application: Interférométrie pour mesurer la densité n_0 du plasma

Reprenons l'expression du vecteur d'onde k en fonction de la fréquence:

$$k = \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_{pe}^2}}{c} = \frac{\sqrt{\omega^2 - \frac{n_0 e^2}{\varepsilon_0 m_e}}}{c} \quad (347)$$

A une fréquence ω donnée, le vecteur d'onde k est une fonction de la densité n_0 . Si une onde traverse un plasma sur une longueur L , le déphasage $\Delta\Phi$ entre cette onde et une onde de même fréquence qui se propage dans le vide (voir figure 52) est:

$$\Delta\Phi = kL - \frac{\omega}{c}L = \frac{L}{c} \left(\sqrt{\omega^2 - \frac{n_0 e^2}{\varepsilon_0 m_e}} - \omega \right) \quad (348)$$

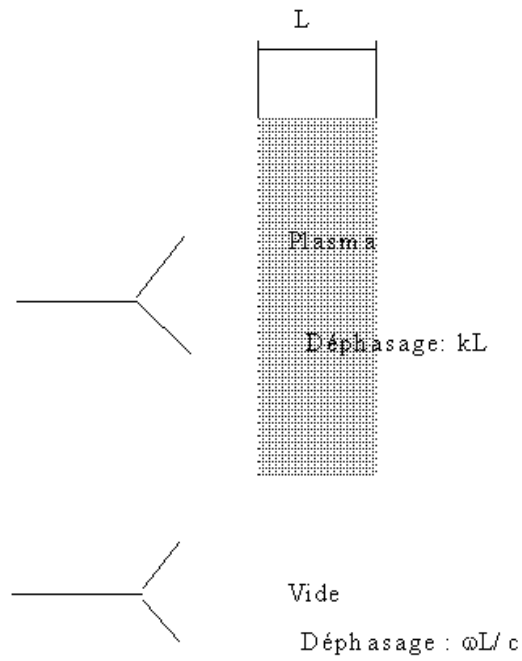


Figure 52:

Connaissant ω et L , la mesure de $\Delta\Phi$ permet de tirer la valeur de n_0 . Pour mesurer $\Delta\Phi$, la technique utilisée est celle de l'interférométrie. (Cf. Exercices)

8.2 Ondes longitudinales (ou électrostatiques) à haute fréquence. Ondes de Langmuir ou Ondes de plasma

8.2.1 Relation de dispersion

Nous appelons **onde longitudinale** ou **onde électrostatique** une **onde ayant le vecteur d'onde \mathbf{k} parallèle à \mathbf{E}_1** . Nous notons tout de suite que pour une telle polarisation le champ magnétique perturbé \mathbf{B}_1 est nul car:

$$\mathbf{k} \wedge \mathbf{E}_1 = \omega \mathbf{B}_1$$

Pour l'étude des ondes électrostatiques, il est alors plus simple d'utiliser l'équation de Poisson $\nabla \cdot \mathbf{E}_1 = \frac{\rho_{e1}}{\varepsilon_0}$ qui dans l'espace de Fourier devient:

$$-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_1 = \frac{\rho_{e1}}{\varepsilon_0} \quad (349)$$

Nous avons directement linéarisé les équations et défini la densité de charge perturbée comme ρ_{e1} .

Pour l'étude des ondes de Langmuir, nous supposons que **les ions ne sont pas affectés par l'onde**, ils sont donc immobiles. Les équations fluides linéarisées pour les électrons sont:

$$\frac{\partial n_{e1}}{\partial t} + n_0 \nabla \cdot \mathbf{u}_{e1} = 0 \quad (350)$$

$$n_0 m_e \frac{\partial \mathbf{u}_{e1}}{\partial t} = -\nabla p_{e1} - n_0 e \mathbf{E}_1 \quad (351)$$

$$n_0^{-\gamma_e} \frac{\partial p_{e1}}{\partial t} - \gamma_e n_0^{-\gamma_e - 1} p_{e0} \frac{\partial n_{e1}}{\partial t} = 0 \quad (352)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E}_1 = -\frac{n_{e1} e}{\varepsilon_0} \quad (353)$$

En considérant des ondes planes (c'est-à-dire en prenant une dépendance selon $\exp[i(\omega t - kz)]$ ²⁶, les équations précédentes se ramènent à:

$$\omega n_{e1} - k n_0 u_{e1} = 0 \quad (354)$$

$$n_0 m_e i \omega u_{e1} = i k p_{e1} - n_0 e E_1 \quad (355)$$

$$p_{e1} = \gamma_e \frac{p_{e0}}{n_0} n_{e1} \quad (356)$$

²⁶La direction z est celle du champ électrique, du vecteur vitesse fluide et du vecteur d'onde $\mathbf{k} = k \mathbf{e}_z$.

$$-ikE_1 = -\frac{n_{e1}e}{\varepsilon_0} \quad (357)$$

Le système d'équations 354 à 357 forme un système d'équations linéaires sans second membre. Pour éviter la solution triviale $E_1 = n_{e1} = u_{e1} = p_{e1} = 0$, il faut que le déterminant des coefficients soit nul:

$$\begin{vmatrix} \omega & -kn_0 & 0 & 0 \\ 0 & n_0m_ei\omega & -ik & n_0e \\ \gamma_e \frac{pe_0}{n_0} & 0 & -1 & 0 \\ \frac{e}{\varepsilon_0} & 0 & 0 & -ik \end{vmatrix} = 0 \quad (358)$$

soit:

$$\omega^2 = \omega_{pe}^2 + k^2 \left(\frac{\gamma pe_0}{n_0 m_e} \right) = \omega_{pe}^2 + k^2 \gamma_e v_{the}^2 \quad (359)$$

avec $v_{the}^2 = \frac{k_B T_e}{m_e}$, en utilisant la relation $pe_0 = n_0 k_B T_e$. La quantité v_{the} est la vitesse thermique des électrons. La relation de dispersion 359 peut aussi être écrite comme:

$$\frac{\omega^2}{\omega_{pe}^2} = 1 + \gamma_e k^2 \lambda_{De}^2 \quad (360)$$

λ_{De} est la longueur de Debye électronique.

Il nous reste à discuter de la valeur de γ_e . La théorie fluide ne nous donne pas sa valeur. Dans le cadre de la **théorie cinétique**, nous pouvons montrer que γ_e **vaut 3**. La relation de dispersion devient donc:

$$\omega = \omega_{pe} (1 + 3k^2 \lambda_{De}^2)^{1/2} \quad (361)$$

Cette relation de dispersion est connue sous le nom de relation de dispersion de Bohm et Gross. Pour de faibles valeurs de $k\lambda_{De}$, nous pouvons développer la racine carrée, ce qui nous donne:

$$\omega = \omega_{pe} \left(1 + \frac{3}{2} k^2 \lambda_{De}^2 \right) \quad (362)$$

De nouveau nous constatons que le fait que nous avons négligé le mouvement des ions est parfaitement justifié, car la fréquence des ondes est supérieure à ω_{pe} .

La vitesse de phase de cette onde est:

$$v_{ph} = \sqrt{3} v_{the} \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 - \omega_{pe}^2}} \quad (363)$$

avec une valeur asymptotique pour $\omega \rightarrow \infty$ de $v_{ph} = \sqrt{3} v_{the}$.

Ce résultat est très important puisque pour une fonction de distribution de vitesse Maxwellienne de température d'équilibre T_{e0} pour les électrons, $f_e(\mathbf{v})$, il peut y avoir certains électrons qui ont une vitesse $v_e \simeq v_{ph}$ (ne pas confondre la vitesse des électrons v_e avec la vitesse fluide u_e). Ce point est crucial lorsqu'on fait un **modèle cinétique** où l'on montre que pour la classe des particules avec $v_e \simeq v_{ph}$ il peut y avoir une **interaction onde-particule en absence de collisions**. Pour une Maxwellienne on montrera (c.f. Cours de Physique des Plasma II) que l'onde est amortie (**amortissement Landau**) ce qui signifie que pour un vecteur d'onde k réel on trouve une fréquence angulaire complexe $\omega = \omega_r + i\omega_i$ avec $\omega_r = \omega_{pe}(1 + 3k^2\lambda_{De}^2)^{1/2}$ et $\omega_i > 0$ qui dépend de la température T_{e0} .

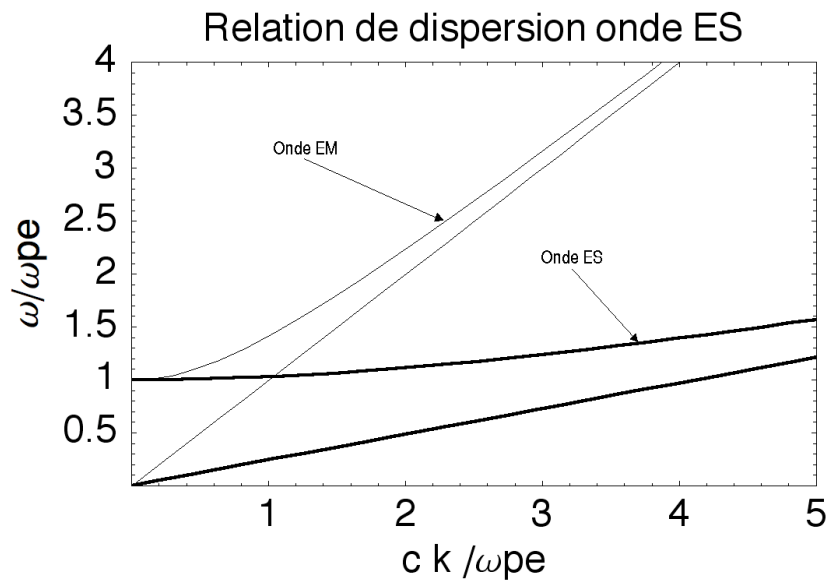


Figure 53: Relation de dispersion de Bohm et Gross. L'axe vertical est ω/ω_{pe} et l'axe horizontal kc/ω_{pe}

L'onde que nous avons étudiée est connue sous le nom d'**onde de Langmuir** ou encore d'**onde de plasma**. Ses caractéristiques sont:

- Le champ électrique de l'onde est parallèle au vecteur d'onde \mathbf{k} . Il n'y a donc pas de champ magnétique associé à l'onde.
- La relation de dispersion est celle de Bohm et Gross (équation 360)
- Les quantités perturbées sont, outre le champ électrique, la densité électronique, la pression électronique et la vitesse fluide électronique.

8.2.2 Fonction diélectrique

Exprimons n_{e1} en fonction de E_1 grâce aux équations 354 à 357:

$$n_{e1}(-e) = ik\varepsilon_0 \left(-\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2 - \gamma_e k^2 v_{the}^2} \right) E_1 \quad (364)$$

Le membre de gauche de l'équation 364 n'est autre que la densité de charge ρ_{e1} due à l'onde. Nous connaissons d'autre part les relations:

$$\nabla \cdot \mathbf{P}_1 = -\rho_{e1}(\mathbf{x}, t) \quad (365)$$

qui dans l'espace de Fourier peut s'écrire comme:

$$\mathbf{P}_1(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon_0 \chi_e(\omega, \mathbf{k}) \mathbf{E}_1(\omega, \mathbf{k}) \quad (366)$$

où χ_e est la susceptibilité électronique et \mathbf{P}_1 la polarisation électrique. Nous avons donc la relation:

$$\begin{aligned} \chi_e(\omega, k) &= -\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2 - \gamma_e k^2 v_{the}^2} \\ \varepsilon(\omega, k) &= 1 + \chi_e = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2 - \gamma_e k^2 v_{the}^2} \end{aligned} \quad (367)$$

La fonction diélectrique $\varepsilon(\omega, k)$ est donnée par la relation 367. Nous retrouvons la formule 346 lorsque le plasma est froid ($T_e = v_{the} = 0$). La connaissance de la fonction diélectrique nous permet de retrouver la relation de dispersion des ondes de Langmuir grâce à l'équation de Poisson:

$$-ikD_1(\omega, k) = 0 \quad (368)$$

avec $D_1(\omega, k) = \varepsilon(\omega, k)E_1$

\mathbf{D}_1 est le vecteur déplacement électrique.

Pour éviter la solution triviale $E_1 = 0$, il faut donc que $\varepsilon(\omega, k)$ soit nul, c'est-à-dire

$$1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2 - \gamma_e k^2 v_{the}^2} = 0$$

soit

$$\omega^2 = \omega_{pe}^2 + \gamma_e k^2 v_{the}^2$$

Pour une onde électrostatique, la relation de dispersion est obtenue en annulant la fonction diélectrique $\varepsilon(\omega, \mathbf{k})$ ²⁷.

8.3 Fonction diélectrique: cas général

En exprimant les équations de Maxwell (Eq.305-306) dans l'espace de Fourier nous avons:

$$-i\mathbf{k} \wedge \mathbf{E} = -i\omega\mathbf{B} \quad (369)$$

$$-i\mathbf{k} \wedge \mathbf{B} = \mu_0\mathbf{j} + \frac{i\omega}{c^2}\mathbf{E} \quad (370)$$

En multipliant (369) par $-i\mathbf{k} \wedge$ et en utilisant (370) on obtient:

$$\mathbf{k} \wedge (\mathbf{k} \wedge \mathbf{E}) = i\mu_0\omega\mathbf{j} - \frac{\omega^2}{c^2}\mathbf{E}. \quad (371)$$

en utilisant la relation constitutive:

$$\mathbf{j}(\omega, \mathbf{k}) = \boldsymbol{\sigma}(\omega, \mathbf{k}) \cdot \mathbf{E}(\omega, \mathbf{k}), \quad (372)$$

et en remplaçant cette dernière équation dans (371), il vient:

$$\mathbf{k} \wedge (\mathbf{k} \wedge \mathbf{E}) = \frac{\omega^2}{c^2} \left[\frac{i\boldsymbol{\sigma}(\omega, \mathbf{k})}{\epsilon_0\omega} - \mathbf{I} \right] \cdot \mathbf{E} = -\frac{\omega^2}{c^2} \boldsymbol{\epsilon}(\omega, \mathbf{k}) \cdot \mathbf{E}. \quad (373)$$

où \mathbf{I} est le dyadique identité:

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \delta_{ij}. \quad (374)$$

²⁷Ce n'est pas le cas pour une onde transverse. Cf. relation de dispersion des ondes transverses.

Le tenseur $\epsilon(\omega, \mathbf{k})$ est le tenseur diélectrique qui est relié à la conductibilité σ et à la susceptibilité χ de la manière suivante:

$$\epsilon = \mathbf{I} - \frac{i\sigma}{\epsilon_0 \omega} = \mathbf{I} + \chi. \quad (375)$$

En développant le double produit vectoriel on peut réécrire le membre de gauche de l'équation (373) comme:

$$\mathbf{k} \wedge (\mathbf{k} \wedge \mathbf{E}) = (\mathbf{k} \cdot \mathbf{E})\mathbf{k} - k^2\mathbf{E} = \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{E} \quad (376)$$

avec $\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{k})$ étant un tenseur²⁸.

Avec ces définitions, l'équation (373) prend la forme:

$$\left[\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{k}) + \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon(\omega, \mathbf{k}) \right] \cdot \mathbf{E} = \mathbf{M}(\omega, \mathbf{k}) \cdot \mathbf{E} = 0. \quad (377)$$

La solution non-triviale de cette équation ($\mathbf{E} \neq 0$) se trouve en posant:

$$\det \left[\mathbf{M}(\omega, \mathbf{k}) \right] = 0, \quad (378)$$

ce qui donne,

$$D(\omega, \mathbf{k}) = 0, \quad (379)$$

la relation de dispersion.

Dans le cas particulier des **ondes électrostatiques** on a $\mathbf{E} \parallel \mathbf{k} \Rightarrow \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{k}) = 0$ et le tenseur $\mathbf{M}(\omega, \mathbf{k})$ se simplifie comme:

$$\mathbf{M}(\omega, \mathbf{k}) = \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon(\omega, \mathbf{k}) \quad (380)$$

ce qui donne une relation de dispersion pour les **ondes électrostatiques** :

$$\det \left[\epsilon(\omega, \mathbf{k}) \right] = 0. \quad (381)$$

²⁸Le double produit vectoriel peut être écrite sous forme dyadique:

$$\mathbf{k} \wedge (\mathbf{k} \wedge \mathbf{E}) = \left[\frac{\mathbf{k}\mathbf{k}}{k^2} - \mathbf{I} \right] \cdot \mathbf{E},$$

avec la forme explicite de $\mathbf{k}\mathbf{k}$ en coordonnées cartésiennes étant:

$$\mathbf{k}\mathbf{k} = [k_i k_j] = \begin{pmatrix} k_x^2 & k_x k_y & k_x k_z \\ k_y k_x & k_y^2 & k_y k_z \\ k_z k_x & k_z k_y & k_z^2 \end{pmatrix}$$

8.4 Ondes électrostatiques à basse fréquence: Ondes acoustiques ioniques

8.4.1 Relation de dispersion

Jusqu'à maintenant nous n'avons considéré que des ondes à haute fréquence, ce qui nous avait permis de négliger le mouvement des ions. Nous allons maintenant considérer les ondes à basse fréquence, ce qui nous oblige à considérer le mouvement des ions. Pour simplifier les calculs, nous prenons les équations suivantes:

$$\frac{\partial n_{i1}}{\partial t} + n_0 \nabla \cdot \mathbf{u}_{i1} = 0 \quad (382)$$

$$n_0 m_i \frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial t} = n_0 e \mathbf{E}_1 \quad (383)$$

$$k_B T_e \nabla n_{e1} = -n_0 e \mathbf{E}_1 \quad (384)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E}_1 = e \frac{n_{i1} - n_{e1}}{\varepsilon_0} \quad (385)$$

L'équation 382 est l'équation de continuité pour les ions. L'équation 383 est l'équation de Newton dans laquelle nous avons négligé le terme de pression. L'équation 384 est l'équation de Newton pour les électrons dans laquelle nous avons négligé l'inertie des électrons et pris le facteur γ_e comme étant égal à 1. Finalement l'équation 385 est l'équation de Poisson.

En utilisant les ondes planes $\exp[i(\omega t - kz)]$ ²⁹ nous trouvons:

$$i\omega n_{i1} - ikn_0 u_{i1} = 0 \quad (386)$$

$$i\omega u_{i1} - \frac{eE_1}{m_i} = 0 \quad (387)$$

$$k_B T_e ikn_{e1} - n_0 e E_1 = 0 \quad (388)$$

$$-ik\varepsilon_0 E_1 - en_{i1} + en_{e1} = 0 \quad (389)$$

C'est de nouveau un système d'équations linéaires sans second membre. Pour éviter la solution triviale nous devons donc avoir:

$$\begin{vmatrix} i\omega & -ikn_0 & 0 & 0 \\ 0 & i\omega & -\frac{e}{m_i} & 0 \\ 0 & 0 & -n_0 e & k_B T_e ik \\ -e & 0 & -ik\varepsilon_0 & e \end{vmatrix} = 0 \quad (390)$$

²⁹Cf. notes sur les ondes de Langmuir sur la direction z .

soit:

$$\omega^2 = \frac{k_B T_e k^2}{m_i} \frac{1}{1 + k^2 \lambda_{De}^2} = c_s^2 k^2 \frac{1}{1 + k^2 \lambda_{De}^2}$$

$$\omega = k \sqrt{\frac{k_B T_e}{m_i}} \sqrt{\frac{1}{1 + k^2 \lambda_{De}^2}} \quad (391)$$

$$\omega = \omega_{pi} \frac{k \lambda_{De}}{\sqrt{1 + k^2 \lambda_{De}^2}} \quad (392)$$

L'équation 391 est la relation de dispersion d'une onde électrostatique que

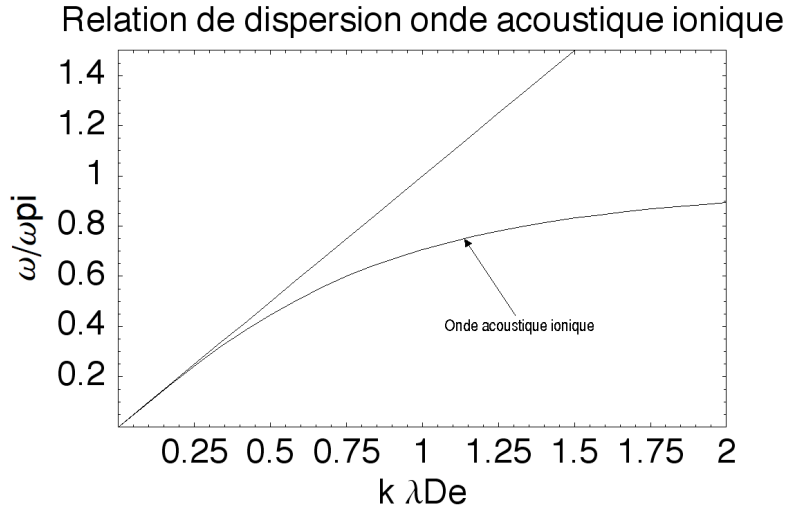


Figure 54: Relation de dispersion des ondes ioniques acoustiques. L'axe vertical est ω/ω_{pi} et l'axe horizontal est $k\lambda_{De}$.

nous appelons **onde acoustique ionique**. Le terme acoustique provient du fait que pour de grandes longueurs d'onde (faibles valeurs de k) la relation de dispersion est celle d'une onde acoustique avec la vitesse sonique égale à:

$$c_s = (k_B T_e / m_i)^{1/2}. \quad (393)$$

La pression est donnée par la pression électronique, mais la masse est celle des ions.

Comme le montre la figure 54 la relation de dispersion des ondes acoustiques ioniques est linéaire pour de faible valeur de $k\lambda_{De}$. En développant le terme $1/(1 + (k\lambda_{De})^2)^{1/2}$ pour de faibles valeurs de $k\lambda_{De}$, nous obtenons:

$$\omega = k \sqrt{\frac{k_B T_e}{m_i}} \left(1 - \frac{1}{2} k^2 \lambda_{De}^2 \right) \quad (394)$$

8.4.2 Discussion

a) Valeurs de n_{i1} et n_{e1} pour \mathbf{k} tendant vers $\mathbf{0}$

Lorsque k tend vers 0 la relation de dispersion des ondes acoustiques ioniques est linéaire:

$$\omega = k(k_B T_e / m_i)^{1/2}$$

Calculons n_{i1} et n_{e1} dans cette limite en utilisant 386 à 388:

$$n_{e1} = n_{i1} = -i \frac{n_0 e}{k_B T_e k} E_1 \quad (395)$$

Pour de petits k , les perturbations de densité ionique et électronique sont égales et la fluctuation de charge électrique totale est nulle.

b) Validité de l'hypothèse de $\mathbf{T}_i = 0$

Nous avons négligé le terme de pression ionique p_i . Du point de vue physique, cette hypothèse est pleinement justifiée grâce à la théorie cinétique qui montre que **les ondes acoustiques ioniques ne sont faiblement amorties que si:**

$$(\mathbf{k}_B \mathbf{T}_i / \mathbf{m}_i)^{1/2} \ll \omega / \mathbf{k} \ll (\mathbf{k}_B \mathbf{T}_e / \mathbf{m}_e)^{1/2} \quad (396)$$

La première inégalité n'est satisfaite que si $T_e \gg T_i$. Ceci justifie de négliger le terme de pression ionique.

c) Fonction diélectrique $\varepsilon(\omega, \mathbf{k})$

La méthode de calcul utilisée pour calculer ε dans le cas des ondes de Langmuir peut naturellement être généralisée pour inclure les ions. Nous trouvons alors:

$$\varepsilon(\omega, k) = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2 - \gamma_e k^2 v_{the}^2} - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2 - \gamma_i k^2 v_{thi}^2} \quad (397)$$

v_{thi} vaut $(k_B T_i / m_i)^{1/2}$. Notez que nous avons choisi des valeurs différentes pour γ_e et γ_i même si nous parlons de la même onde³⁰. Dans l'hypothèse que nous avons faite ($T_i = 0$), ε se ramène à:

$$\varepsilon(\omega, k) = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2 - k^2 v_{the}^2} - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2}$$

Nous avons pris $\gamma_e = 1$. De plus nous pouvons négliger ω^2 devant $k^2 v_{the}^2$ (Inégalité 396). Nous retrouvons alors la relation de dispersion des ondes

³⁰ Naturellement les valeurs de γ dépendent des ondes. Ainsi γ_e vaut 3 pour les ondes de Langmuir (électrons adiabatiques) et 1 pour les ondes acoustiques ioniques (électrons isothermes). Si nous avons fait les calculs avec une valeur de T_i non nulle la théorie cinétique nous donne $\gamma_i = 3$ pour les ondes acoustiques ioniques.

acoustiques ioniques en annulant ε :

$$\omega^2 = \frac{1}{\omega_{pi}^2} \frac{k^2 \lambda_{De}^2}{1 + k^2 \lambda_{De}^2} = k^2 \left(\frac{k_B T_e}{m_i} \right) \frac{1}{1 + k^2 \lambda_{De}^2}$$

d) **Remarque générale sur les valeurs de $k\lambda_{De}$**

Cette remarque porte sur les ondes de Langmuir et sur les ondes acoustiques ioniques. Nous constatons que le vecteur d'onde est normalisé à $1/\lambda_{De}$ et que sur les graphes (figures 53 et 54) nous n'avons pas calculé ω pour des valeurs de $k\lambda_{De}$ supérieures à 1. La raison est, là encore, liée à la théorie cinétique qui nous apprend que **les ondes de Langmuir et les ondes acoustiques ioniques sont fortement amorties**³¹ lorsque $k\lambda_{De}$ est proche de 1.

8.4.3 Résumé des relations de dispersion dérivée du modèle à deux fluides pour $B_0 = 0$, $T \neq 0$ (Figure 55)

On suppose que l'onde se propage dans la direction z .

On notera que le modèle fluide n'est plus valable pour $k^2 \lambda_D^2 > 1$.

Onde électromagnétique, onde transverse "t"

$$E_x, E_y \neq 0, E_z = 0 \quad \omega^2 = \omega_{pe}^2 + k^2 c^2 \quad (398)$$

Onde électrostatique, onde longitudinale "l"

$$E_x, E_y = 0, E_z \neq 0 \quad \omega^2 = \omega_{pe}^2 + 3k^2 v_{the}^2 \quad \text{"Onde de Langmuir"} \quad (399)$$

$$\omega^2 = k^2 c_s^2 \quad (400)$$

$$\omega^2 \simeq \omega_{pi}^2 \quad \text{"Onde ionique acoustique"} \quad (401)$$

$$\omega^2 \simeq \omega_{pi}^2 + k^2 v_{thi}^2 \gamma \quad (402)$$

On notera que l'onde ionique acoustique peut se propager si $T_e \gg T_i$, autrement on a une interaction résonnante onde-particule et un fort amortissement. Si $T_e \gtrsim T_i$ les ondes avec $\omega < \omega_{pi}$ ne se propagent pas.

³¹Notez que dans le cadre de la théorie que nous avons faites les ondes ne sont pas amorties. Le vecteur d'onde et la fréquence sont des nombres réels et $\exp[i(\omega t - kz)]$ est purement oscillant.

Summary of dispersion relation derived for

- $B_0 = 0$
- $T \neq 0$
- Two-fluid model

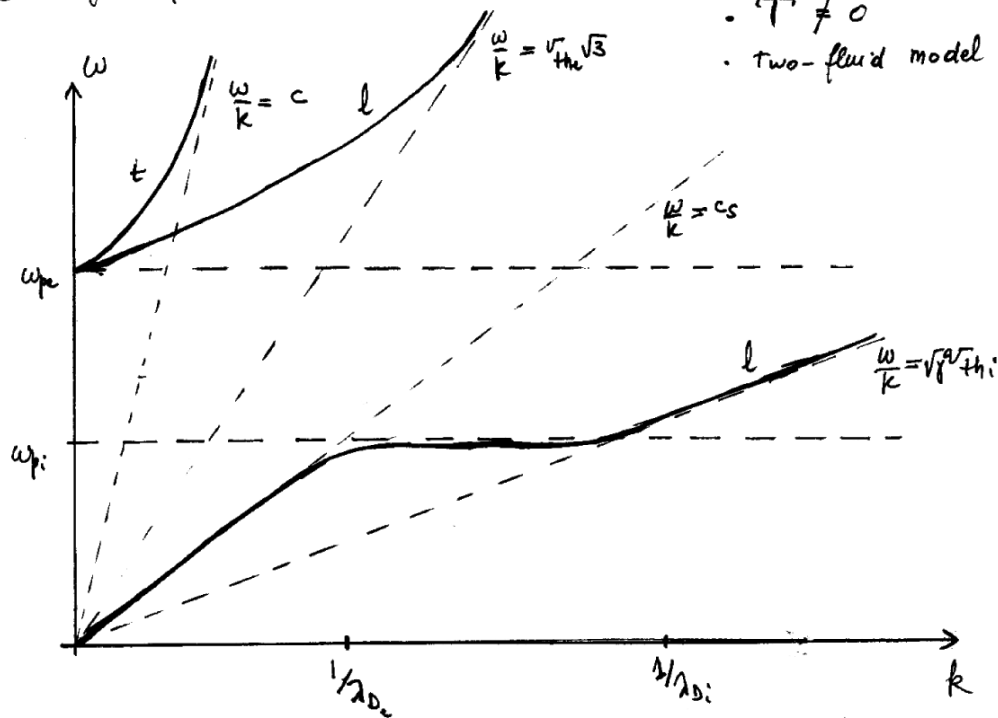


Figure 55: Résumé pour $B_0 = 0$, $T \neq 0$, modèle à deux fluides

9 La MagnétoHydroDynamique, MHD

9.1 Les équations de la magnétohydrodynamique

Nous allons réduire les équations à deux fluides à celle à un fluide chargé soumis à des champs électrique et magnétique. Cet ensemble d'équations est appelé équations de la magnétohydrodynamique (MHD).

Les quantités que nous considérons sont :

- La densité de masse ρ_m ³²:

$$\rho_m = n_i m_i + n_e m_e \approx n(m_i + m_e) \approx n m_i$$

où n est le nombre de ions ou d'électrons par unité de volume. Nous avons supposé un plasma avec une seule espèce de ions et que localement il y a quasi-neutralité: $n_e \simeq n_i = n$.

- La densité de charge ρ (nous avons supposé que les ions ont une charge e , c'est-à-dire $Z = 1$):

$$\rho = n_i e - n_e e = e(n_i - n_e)$$

- La vitesse fluide \mathbf{u} :

$$\mathbf{u} = \frac{\sum_k n_k m_k \mathbf{u}_k}{\rho_m} \approx \frac{m_i \mathbf{u}_i + m_e \mathbf{u}_e}{m_i + m_e} \approx \mathbf{u}_i + \frac{m_e}{m_i} \mathbf{u}_e$$

- La densité de courant \mathbf{j} :

$$\mathbf{j} = e(n_i \mathbf{u}_i - n_e \mathbf{u}_e) \approx ne(\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_e)$$

De la définition de la vitesse fluide \mathbf{u} et de la densité de courant \mathbf{j} , nous déduisons facilement les expressions de \mathbf{u}_e et \mathbf{u}_i :

$$\mathbf{u}_i \approx \mathbf{u} + \frac{m_e}{m_i} \frac{\mathbf{j}}{ne}$$

$$\mathbf{u}_e \approx \mathbf{u} - \frac{\mathbf{j}}{ne}$$

³²Afin d'éviter des confusions avec la densité de charge, nous définissons la densité de masse par ρ_m

Dérivons les équations du plasma en utilisant ces quantités. En multipliant les équations de continuité pour les fluides d'électrons et d'ions par la masse de l'électron et de l'ion et en faisant la somme sur les deux espèces, nous trouvons l'équation pour *la conservation de la densité de masse* ρ_m :

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_m \mathbf{u}) = 0 \quad (403)$$

De même nous pouvons obtenir *l'équation de Newton*:

$$\rho_m \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \rho_m \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right] = \rho \mathbf{E} + \mathbf{j} \wedge \mathbf{B} - \nabla p \quad (404)$$

où p est la pression totale ($p = p_e + p_i$) et nous avons fait les approximations: $\mathbf{u} \approx \mathbf{u}_i$, $\rho_m \approx nm_i$ et nous avons utilisé $\mathbf{R}_{jk} = -\mathbf{R}_{kj}$. A ces équations nous devons aussi ajouter une équation d'état, par exemple:

$$\frac{d(p\rho_m^{-\gamma})}{dt} = 0 \quad (405)$$

Quelles sont les conditions de validité de ces équations? Nous remarquons que les densités n_e et n_i sont supposées égales à n . Donc les deux fluides d'électrons et d'ions se comportent de la "même" façon. Pour que ceci soit satisfait, à cause de la grande différence entre l'inertie des ions et des électrons, l'échelle de temps doit être celle des ions³³, c'est à dire les variations temporelles doivent être lentes. Mais de quelle échelle de temps parlons-nous? Dans le domaine fréquentiel, en présence d'un champ magnétique statique, nous devons avoir :

$$\omega \ll \Omega_{ci} \ll \Omega_{ce}$$

La MHD décrit donc des phénomènes à très basse fréquence.

Dans ce cadre les équations de Maxwell deviennent:

$$\nabla \wedge \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (406)$$

$$\nabla \wedge \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} \quad (407)$$

Dans l'équation (407), nous avons négligé le courant de déplacement devant le courant de conduction:

$$\mathbf{j} \gg \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

³³Nous verrons cette même propriétés lors de l'étude des ondes dans un plasma non-magnétisé pour la limite à basse fréquence de l'onde acoustique ionique.

car nous nous limitons à des phénomènes à basse fréquence.

En examinant les variables des équations (403) à (407), nous notons que, contrairement au cas des équations à deux fluides, il nous manque une équation vectorielle. Nous rappelons la relation entre la densité de courant \mathbf{j} et le champ électrique. Dans le référentiel se mouvant avec la vitesse fluide \mathbf{u} , le champ électrique est \mathbf{E}' :

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{u} \wedge \mathbf{B}$$

C'est simplement la relation de transformation des champs dans la limite non-relativiste (c.f. exercices). La relation entre la densité de courant \mathbf{j} et \mathbf{E}' est alors:

$$\mathbf{j} = \sigma_{DC} \mathbf{E}' \quad (408)$$

σ_{DC} est la conductibilité électrique DC³⁴ et l'équation (408) est la loi d'Ohm. Si la conductibilité électrique était donnée, la relation (408) nous fournirait l'équation supplémentaire recherchée³⁵. La MHD idéale suppose que la conductibilité électrique du milieu (par exemple le plasma) est infinie³⁶:

$$\sigma \rightarrow \infty$$

Sous cette hypothèse la loi d'Ohm implique, pour assurer un \mathbf{j} fini, que:

$$\mathbf{E}' = 0 = \mathbf{E} + \mathbf{u} \wedge \mathbf{B} \quad (410)$$

L'ensemble des équations (403) à (406) et l'équation (410) forment les équations de la MHD idéale.

³⁴Ne pas confondre la conductibilité électrique DC, σ_{DC} , dues aux collisions coulombiennes, avec le tenseur de conductibilité électrique, $\sigma(\omega, \mathbf{k})$. Pour simplifier la notation on va omettre l'indice *DC* dans ce qui suit.

³⁵On peut dériver l'expression (408) d'une manière plus formelle en prenant une combinaison linéaire des équations à 2 fluides pour des électrons de masse m et une espèce de ions de masse M (c.f. exercices). On montre par cette approche que la loi d'Ohm généralisée s'écrit, dans la limite $m/M \rightarrow 0$,

$$\mathbf{E} + \mathbf{u} \wedge \mathbf{B} = \mathbf{j}/\sigma_{DC} + \frac{1}{en}(\mathbf{j} \wedge \mathbf{B} - \nabla p_e) \quad (409)$$

Le terme $\mathbf{j} \wedge \mathbf{B}$ est appelé terme de Hall. Très souvent ce terme et celui proportionnel à ∇p_e peuvent être négligés ce qui donne l'expression (408).

³⁶La propriété d'avoir une conductibilité infinie est différente de la supraconductivité, car nous n'avons pas l'effet Meissner. On utilise cette même approximation ($\sigma \rightarrow \infty$), dans le cas de fluides très conducteurs soumis à des champ \mathbf{E} et \mathbf{B} , comme par exemple pour des métaux en fusion.

9.1.1 Conditions de validité des équations de la MHD idéale

Outre la condition sur la fréquence des phénomènes considérés, notons que dans le cadre des équations fluides nous négligeons le mouvement des particules. Nous demandons que :

$$\frac{\text{Rayon de Larmor ionique}}{\text{Echelle spatiale}} \ll 1$$

Nous considérons que le plasma est un seul fluide. Il faut donc qu'il y ait un grand nombre de collisions dans le plasma pour thermaliser les populations d'électrons et d'ions. La condition de conductibilité électrique infinie nécessite que les collisions donnant lieu à une friction entre les électrons et les ions doivent être faibles (plasma chaud).

9.1.2 Propriétés des équations de la MHD

Force magnétique et force électrique

Quelle est l'importance de la densité de force électrique $\rho\mathbf{E}$ par rapport à la densité de force magnétique ($\mathbf{j} \wedge \mathbf{B}$)? Cette question est importante car elle nous permet de comprendre pourquoi le confinement du plasma se fait avec des champs magnétiques et non des champs électriques.

Estimons d'abord la densité de charge ρ_{el} en utilisant l'équation de Poisson:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_{el}}{\varepsilon_0}$$

On considère l'échelle de variation spatiale $L \sim |\nabla|^{-1}$. En terme d'ordre de grandeur, l'équation de Poisson donne :

$$\frac{E}{L} \approx \frac{\rho_{el}}{\varepsilon_0} \quad \text{soit} \quad \rho_{el} \approx \varepsilon_0 \frac{E}{L}$$

La force électrique vaut donc approximativement:

$$\rho_{el}E \approx \varepsilon_0 \frac{E^2}{L}$$

Estimons la force magnétique. Nous avons (dans la limite des basses fréquences qui nous a permis de négliger le courant de déplacement devant le courant de conduction):

$$\mathbf{j} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \wedge \mathbf{B} \quad \text{soit} \quad j \approx \frac{B}{\mu_0 L}$$

et la densité de force magnétique vaut:

$$j \wedge B \approx \frac{B^2}{\mu_0 L}$$

Le rapport des densités de force électrique et magnétique est donc:

$$\frac{\rho_{el} E}{j \wedge B} \approx \varepsilon_0 \mu_0 \frac{E^2}{B^2} \quad (411)$$

La relation entre \mathbf{E} et \mathbf{B} est donnée par l'équation de Maxwell:

$$\nabla \wedge \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

Soit $\tau \sim \omega^{-1}$, l'échelle de variation temporelle:

$$\frac{E}{L} \approx \frac{B}{\tau}$$

L'expression (411) devient alors:

$$\frac{\rho_{el} E}{j \wedge B} \approx \frac{1}{c^2} \frac{L^2}{\tau^2} \approx \frac{(\text{Vitesse du phénomène})^2}{c^2} \ll 1 \quad \text{dans la limite non-relativiste}$$

Dans la limite non-relativiste, la densité de force électrique est beaucoup plus faible que la densité de force magnétique.

En MHD nous négligeons donc la force électrique devant la force magnétique.

L'équation de Newton (404) se ramène à:

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \rho \left[\frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \right] \mathbf{u} = \mathbf{j} \wedge \mathbf{B} - \nabla p \quad (412)$$

où, pour simplifier la notation, nous avons omis l'indice m pour la densité de masse ρ_m . Dans ce qui suit on va utiliser ρ pour définir la densité de masse.

9.2 Variation du flux magnétique dans le cadre de la MHD idéale

Considérons le flux magnétique Φ à travers une surface S à travers le plasma comme montré dans la figure 56. Cette surface S est liée au plasma et varie lorsque le plasma bouge. Soit C le contour entourant la surface S .

$$\Phi(t) = \int_{S(t)} \mathbf{B}(t) \cdot d\mathbf{S} \quad (413)$$

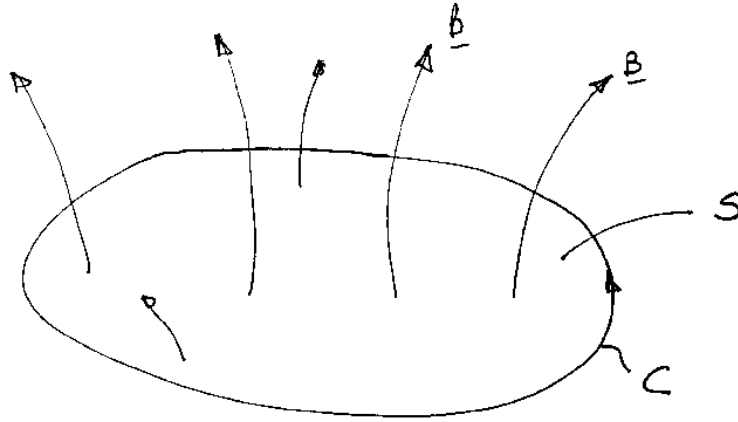


Figure 56: Flux magnétique à travers une surface S.

La variation temporelle du flux est composée de deux contributions:

- celle due à la variation de $B(t)$ à travers la surface S
- celle due à la variation de la surface S due au mouvement du plasma.

Le premier terme est égal à:

$$\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} = - \int_S (\nabla \wedge \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{S} = - \int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (414)$$

Calculons le deuxième terme $\int \mathbf{B} \cdot \frac{d(\Delta \mathbf{S})}{dt}$. Le terme $d(\Delta \mathbf{S})$ vaut (cf. figure 57):

$$\frac{d(\Delta \mathbf{S})}{dt} = \mathbf{u} \wedge d\mathbf{l}$$

Donc:

$$\int \mathbf{B} \cdot \frac{d(\Delta \mathbf{S})}{dt} = \int \mathbf{B} \cdot (\mathbf{u} \wedge d\mathbf{l}) \quad (415)$$

En additionnant les deux expressions (414) et (415) nous obtenons:

$$\frac{d\Phi}{dt} = - \int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \int_C \mathbf{B} \cdot (\mathbf{u} \wedge d\mathbf{l})$$

Pour un plasma de conductibilité infinie nous avons:

$$\mathbf{E} = -(\mathbf{u} \wedge \mathbf{B})$$

Donc:

$$\frac{d\Phi}{dt} = \int_C (\mathbf{u} \wedge \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} + \int_C \mathbf{B} \cdot (\mathbf{u} \wedge d\mathbf{l})$$

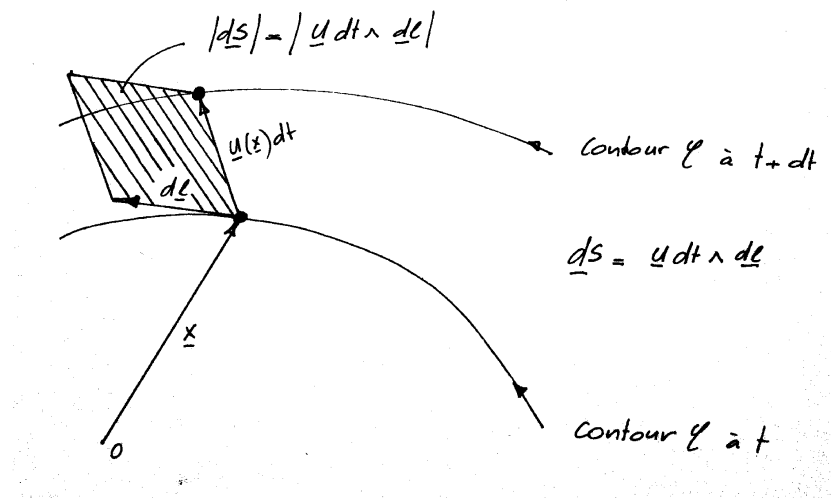


Figure 57: Déplacement du contour C

En utilisant la relation:

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c},$$

il vient:

$$\frac{d\Phi}{dt} = - \int \mathbf{B} \cdot (\mathbf{u} \wedge d\mathbf{l}) + \int \mathbf{B} \cdot (\mathbf{u} \wedge d\mathbf{l}) = 0 \quad (416)$$

Le flux magnétique est conservé lorsque le fluide bouge. On dit que le flux est gelé dans le plasma.

9.2.1 Plasma gelé par les lignes de champ magnétique

Une propriété équivalente de l'équation (416) est que dans la limite de conductibilité infinie (MHD idéale) on peut montrer que le plasma est gelé dans les lignes de champ magnétique dans le sens décrit ci-dessous.

On va montrer que dans l'approximation de la MHD idéale, deux éléments fluides du plasma, initialement se trouvant sur une ligne de champ quelconque vont se trouver à des temps ultérieurs sur cette même ligne de champ indépendamment du mouvement du plasma.

- Calculons d'abord la variation de l'éléments de longueur $d(\Delta l)$. Pour ceci calculons la quantité $\frac{d}{dt}(\Delta l)$

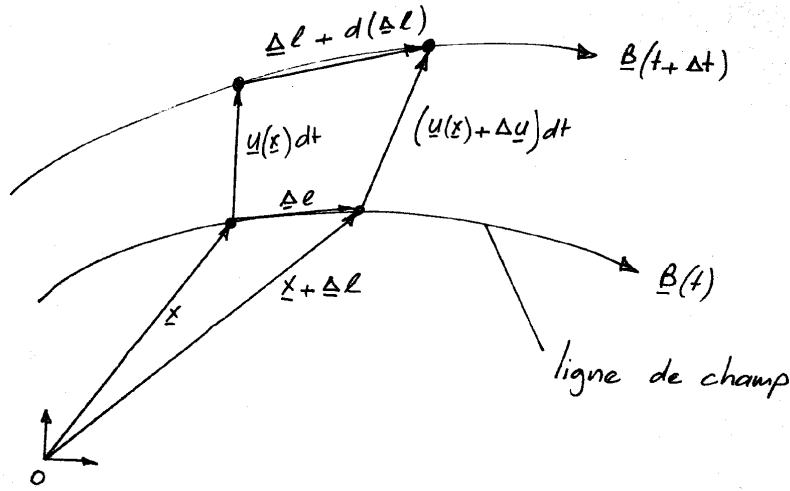


Figure 58: On considère à $t = 0$ deux éléments du plasma infiniment proches et se trouvant sur une même ligne de champ $\mathbf{B}(t)$. Dans l'intervalle de temps dt , ces deux éléments bougent d'une distance respective $\mathbf{u}dt$ et $(\mathbf{u} + \Delta\mathbf{u})dt$.

Au premier ordre:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{l}) \cong \mathbf{u}(\mathbf{x}) + (\Delta\mathbf{l} \cdot \nabla)\mathbf{u}$$

D'après la figure 58:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{x})dt + (\Delta\mathbf{l} + d(\Delta\mathbf{l})) &= \Delta\mathbf{l} + \mathbf{u}(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{l})dt \\ \mathbf{u}(\mathbf{x})dt + d(\Delta\mathbf{l}) &= [\mathbf{u}(\mathbf{x}) + (\Delta\mathbf{l} \cdot \nabla)\mathbf{u}]dt \end{aligned}$$

Donc:

$$\frac{d(\Delta\mathbf{l})}{dt} = (\Delta\mathbf{l} \cdot \nabla)\mathbf{u} \quad (417)$$

- Calculons la variation de $\mathbf{B}(t)$

$$\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \wedge \mathbf{E}$$

$$\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \wedge (\mathbf{u} \wedge \mathbf{B}) = \underbrace{\mathbf{u}(\nabla \cdot \mathbf{B})}_{=0} - \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{u}) + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{B}$$

où nous avons utilisé l'identité:

$$\nabla \wedge (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = \mathbf{a}(\nabla \cdot \mathbf{b}) - \mathbf{b}(\nabla \cdot \mathbf{a}) + (\mathbf{b} \cdot \nabla)\mathbf{a} - (\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{b} \quad (418)$$

En utilisant l'équation(418) la dérivée totale de \mathbf{B} en suivant le mouvement du plasma devient:

$$\frac{d\mathbf{B}}{dt} = \frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{B} = (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{u} - \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{u})$$

Pour montrer que Δl reste toujours parallèle à \mathbf{B} calculons:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\Delta l \wedge \mathbf{B}) &= \frac{d(\Delta l)}{dt} \wedge \mathbf{B} + \Delta l \wedge \frac{d\mathbf{B}}{dt} \\ &= [(\Delta l \cdot \nabla)\mathbf{u}] \wedge \mathbf{B} + \Delta l \wedge [(\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{u} - \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{u})] \end{aligned}$$

Puisque $\Delta l \parallel \mathbf{B}$ le troisième terme du membre de droite s'annule.

$$\frac{d}{dt}(\Delta l \wedge \mathbf{B}) = [(\Delta l \cdot \nabla)\mathbf{u}] \wedge \mathbf{B} - (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{u} \wedge \Delta l$$

On utilise à nouveau le fait que Δl est parallèle à \mathbf{B} .

$$\Rightarrow \Delta l = \alpha \mathbf{B}$$

Le terme de droite s'écrit alors:

$$\begin{aligned} \alpha(\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{u} \wedge \mathbf{B} - \alpha(\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{u} \wedge \mathbf{B} &= 0 \\ \Rightarrow \frac{d}{dt}(\Delta l \wedge \mathbf{B}) &= 0 \end{aligned}$$

L'évolution de Δl est telle qu'il reste parallèle à \mathbf{B} .

Indépendamment de la complexité du mouvement, chaque ligne de champ garde son identité puisque chaque élément du plasma garde aussi son identité. Dans ces conditions, les lignes de champs magnétique ainsi que les tubes de flux évoluent comme s'ils étaient des objets réels. Ce résultat très général reste valable tant que la loi d'Ohm très simple $\mathbf{E} + \mathbf{u} \wedge \mathbf{B} = 0$ reste valable.

9.3 Variation du flux magnétique dans le cadre de la MHD avec conductibilité σ finie (MHD résistive)

Notons que la conservation du flux magnétique n'est vrai que si la conductibilité électrique σ est infinie. En effet si σ est finie nous avons:

$$\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{u} \wedge \mathbf{B})$$

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{j}}{\sigma} - \mathbf{u} \wedge \mathbf{B} = -\frac{\nabla \wedge \mathbf{B}}{\mu_0 \sigma} - \mathbf{u} \wedge \mathbf{B} \quad (419)$$

Le terme $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ vaut donc:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \wedge \mathbf{E} = -\frac{\nabla \wedge (\nabla \wedge \mathbf{B})}{\mu_0 \sigma} + \nabla \wedge (\mathbf{u} \wedge \mathbf{B}) \quad (420)$$

Dans le calcul de $d\Phi/dt$, le terme en $\nabla^2 \mathbf{B}$ ne s'annule pas et la variation de flux est égal à:

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{1}{\mu_0 \sigma} \int \nabla^2 \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS$$

Lorsque σ est infinie nous retrouvons bien la conservation du flux.

9.3.1 Diffusion du champ magnétique dans le plasma

Pour estimer quelle est l'échelle de temps sur laquelle on peut considérer que le flux est gelé dans le plasma, considérons le cas avec $\sigma \neq 0$ ce qui nous place dans ce que l'on appelle la MHD résistive. Nous sommes intéressés aux échelles de temps typiques de variation de \mathbf{B} . En développant les opérateurs dans l'équation (420) il vient:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) - \frac{1}{\sigma \mu_0} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) = \\ &= \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) - \frac{1}{\sigma \mu_0} (\nabla(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \nabla^2 \mathbf{B}) = \underbrace{\nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B})}_{\text{convection}} + \underbrace{\frac{1}{\sigma \mu_0} \nabla^2 \mathbf{B}}_{\text{diffusion}}. \end{aligned} \quad (421)$$

La variation de \mathbf{B} dans le plasma est due au fait que \mathbf{B} est transporté (terme de convection) avec la plasma et aussi à une diffusion (terme de diffusion). Pour estimer l'importance relative des deux termes, on considère l'échelle de variation spatiale $L \sim |\nabla|^{-1}$. Il vient donc:

$$\frac{|\frac{1}{\sigma \mu_0} \nabla^2 \mathbf{B}|}{|\nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B})|} \sim \frac{\frac{1}{\sigma \mu_0} \frac{B}{L^2}}{\frac{uB}{L}} = \frac{1}{\sigma \mu_0 u L} \equiv R_m^{-1}, \quad (422)$$

où $R_m = \sigma \mu_0 u L$ est le nombre de Reynolds magnétique.³⁷ Dans la plupart des plasmas d'intérêt $R_m \gg 1$. Le temps caractéristique de diffusion de \mathbf{B}

³⁷dans les fluides ordinaires, décrit par l'équation de Navier–Stokes, on définit:

$$R \equiv \frac{\text{force d'inertie}}{\text{force de viscosité}} = \frac{|\rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}|}{|\mu \nabla^2 \mathbf{u}|} \sim \frac{\rho u L}{\mu}, \quad (423)$$

où μ est la viscosité qui représente un terme de dissipation.

dans le plasma est:

$$\tau = \left(\frac{1}{\mu_0 \sigma L^2} \right)^{-1} = \frac{R_m L}{u} \quad (424)$$

qui est en général macroscopique. Par exemple dans le Tokamak JET ($L \cong 1$ m, $T_e = 10$ keV, $\eta = \frac{1}{\sigma} = 5 \cdot 10^{-5} \times T_{e[\text{eV}]}^{-3/2} \ln \Lambda \sim 7.5 \cdot 10^{-10} \Omega\text{m}$)

$$\tau \sim 1700 \text{ s.} \quad (425)$$

Dans les plasmas spatiaux ce temps est même significativement plus élevé dû aux valeurs énormes de L . Un exemple important qui démontre la longue échelle de temps nécessaire pour découpler le plasma du champ magnétique vient des éruptions solaires et du vent solaire.

Le vent solaire est généré par du plasma éjecté radialement par le soleil. Ce plasma, qui constitue le vent solaire, transporte avec lui le champ magnétique solaire (terme de convection) pratiquement jusqu'au niveau de la magnétosphère terrestre. L'interaction entre la magnétosphère et le champ magnétique terrestre dépend fortement de l'orientation du champ magnétique transporté par le vent solaire. Cette direction est difficile à prédire puisqu'elle dépend du champ à l'intérieur du soleil qui est turbulent et change souvent d'orientation.

La propriété de geler le champ magnétique dans un fluide hautement conducteur comme le plasma peut aussi expliquer l'origine du champ magnétique dans l'univers ainsi que les champs magnétique des planètes qui ont un noyau métallique en fusion hautement conducteur. Cet effet de génération spontanée d'un champ magnétique macroscopique est appelé effet dynamo.

9.4 Conservation de l'énergie

En utilisant l'équation du mouvement (404) et l'équation de convection du champ magnétique \mathbf{B} dans un plasma parfaitement conducteur, avec les équations de Maxwell dans l'approximation de la MHD, on peut dériver une équation de conservation de l'énergie pour un fluide parfaitement conducteur ($\sigma \rightarrow \infty$) qui satisfait une équation d'état adiabatique.

Pour un système isolé, cette équation de conservation de l'énergie s'écrit comme:

$$\frac{dW}{dt} = 0, \quad (426)$$

avec l'énergie totale donnée par:

$$W = \int \left[\frac{1}{2} \rho |\mathbf{u}|^2 + \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{|\mathbf{B}|^2}{2\mu_0} \right] dV \quad (427)$$

On peut interpréter cette énergie totale de la manière suivante:

$$W = T + V \quad (428)$$

avec l'énergie cinétique définie par:

$$T = \int \frac{1}{2} \rho |\mathbf{u}|^2 dV, \quad (429)$$

et l'énergie potentielle donnée par:

$$V = \int \left(\frac{p}{\gamma - 1} + \frac{|\mathbf{B}|^2}{2\mu_0} \right) dV, \quad (430)$$

où l'énergie potentielle contient un terme thermique et un autre dû au champ \mathbf{B} . La démonstration de cette loi de conservation se fait en multipliant scalairement l'équation du mouvement (404) par \mathbf{u} et en intégrant sur tout l'espace (c.f. exercices).

La loi de conservation de l'énergie dans le cadre de la MHD idéale est utilisée dans l'étude de stabilité de configuration magnétiques de confinement du plasma. Par analogie au résultat de la mécanique (particule dans un puit de potentiel), en vertu de la loi de conservation de l'énergie nous savons qu'une configuration d'équilibre linéairement stable correspond à un minimum local de l'énergie potentielle V . Ce résultat est à la base du **principe de l'énergie** que nous verrons plus tard dans le cours.

En résumé le modèle de la MHD idéale satisfait les loi de conservation suivantes:

- Conservation de la masse
- Conservation de l'impulsion
- Conservation de l'énergie
- Conservation du flux magnétique

9.5 Quelques propriétés des équations de la MHD

9.5.1 Vitesse de dérive $\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}$

Notons que formellement la vitesse de dérive $\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}$ due à un champ électrique \mathbf{E} perpendiculaire à \mathbf{B} permet de satisfaire l'équation d'Ohm avec une conductibilité électrique infinie. En effet :

$$\mathbf{v}_D = \frac{\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}}{B^2}$$

$$\mathbf{E} + \mathbf{v}_D \wedge \mathbf{B} = \mathbf{E} + \left(\frac{\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}}{B^2} \right) \wedge \mathbf{B} = 0$$

En assimilant la vitesse fluide \mathbf{u} à \mathbf{v}_D , l'équation d'Ohm avec une conductibilité infinie est satisfaite.

9.5.2 Calcul de la densité de force de Lorentz

Calculons la densité de force de Lorentz $\mathbf{J} \wedge \mathbf{B}$:

$$\mathbf{J} \wedge \mathbf{B} = \frac{1}{\mu_0} (\nabla \wedge \mathbf{B}) \wedge \mathbf{B} = -\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{B}) = -\nabla \left(\frac{B^2}{2\mu_0} \right) + \frac{(\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B}}{\mu_0} \quad (431)$$

Le terme $(B^2/2\mu_0)$ est analogue à une pression. On l'appelle la pression magnétique.

L'équation de Newton (412) devient:

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right] = -\nabla \left(P + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) + \rho \mathbf{g} + \frac{(\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B}}{\mu_0} \quad (432)$$

Le rapport de la pression thermique P à la pression magnétique $(B^2/2\mu_0)$ est noté β :

$$\beta = \frac{\text{Pression thermique}}{\text{Pression magnétique}} = \frac{nk_B T}{B^2/2\mu_0} \quad (433)$$

Nous pouvons expliciter l'expression (431) en développant le terme $\frac{(\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B}}{\mu_0}$; considérons pour cela le référentiel de Frenet relatif au champ magnétique. Ce référentiel est constitué des vecteurs unitaires \mathbf{t} tangent à la ligne de champ, \mathbf{n} normal à la ligne de champ dirigé vers l'intérieur et \mathbf{b} le vecteur bi-normal à la ligne de champ (voir figure 59).

Nous avons donc:

$$\mathbf{B} = B \mathbf{t}$$

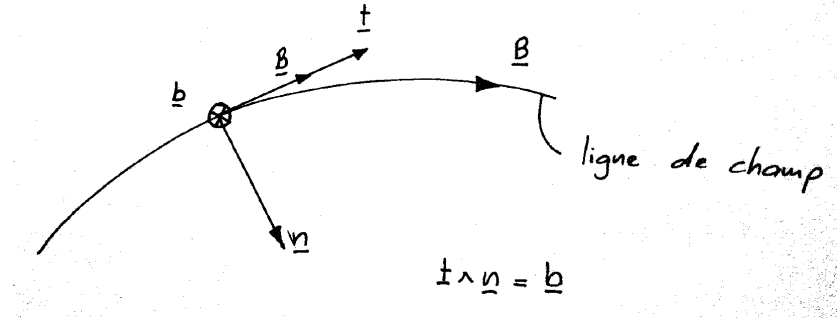


Figure 59: Trièdre de Frenet

Si nous dénotons les dérivées selon \mathbf{t} , \mathbf{n} et \mathbf{b} par $\frac{\partial}{\partial s}$, $\frac{\partial}{\partial n}$, $\frac{\partial}{\partial b}$, c'est-à-dire que le vecteur $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial n}, \frac{\partial}{\partial b}\right)$, nous avons:

$$(\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{B} = B \frac{\partial}{\partial s} B \mathbf{t} = \mathbf{B} \frac{\partial B}{\partial s} + B^2 \frac{\partial \mathbf{t}}{\partial s} = \mathbf{t} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial B^2}{\partial s} \right) + \mathbf{n} \left(\frac{B^2}{R} \right)$$

car $\frac{\partial \mathbf{t}}{\partial s} = \frac{\mathbf{n}}{R}$, R étant le rayon de courbure local. La densité de force magnétique est donc:

$$\mathbf{j} \wedge \mathbf{B} = \mathbf{n} \left(\frac{B^2}{\mu_0 R} - \frac{\partial B^2}{\partial n} \frac{1}{2\mu_0} \right) - \mathbf{b} \left(\frac{\partial B^2}{\partial b} \frac{1}{2\mu_0} \right) \quad (434)$$

De manière équivalente on peut écrire le terme $\mathbf{j} \wedge \mathbf{B}$ comme:

$$\mathbf{j} \wedge \mathbf{B} = \underbrace{-\nabla \left(\frac{\mathbf{B}^2}{2\mu_0} \right) + \nabla_{\parallel} \left(\frac{\mathbf{B}^2}{2\mu_0} \right)}_{-\nabla_{\perp} \left(\frac{\mathbf{B}^2}{2\mu_0} \right)} + \frac{1}{\mu_0} \frac{\mathbf{B}^2}{R} \mathbf{n} = -\nabla_{\perp} \left(\frac{\mathbf{B}^2}{2\mu_0} \right) + \frac{1}{\mu_0} \frac{\mathbf{B}^2}{R} \mathbf{n} \quad (435)$$

Nous interprétons l'expression (434) en remarquant que la densité de force de Lorentz comprend deux composantes : une pression $B^2/2\mu_0$ et une tension élastique avec une tension B^2/μ_0 . Cette tension appuie sur le plasma avec une force $B^2/R\mu_0$ (c.f. figure 60).

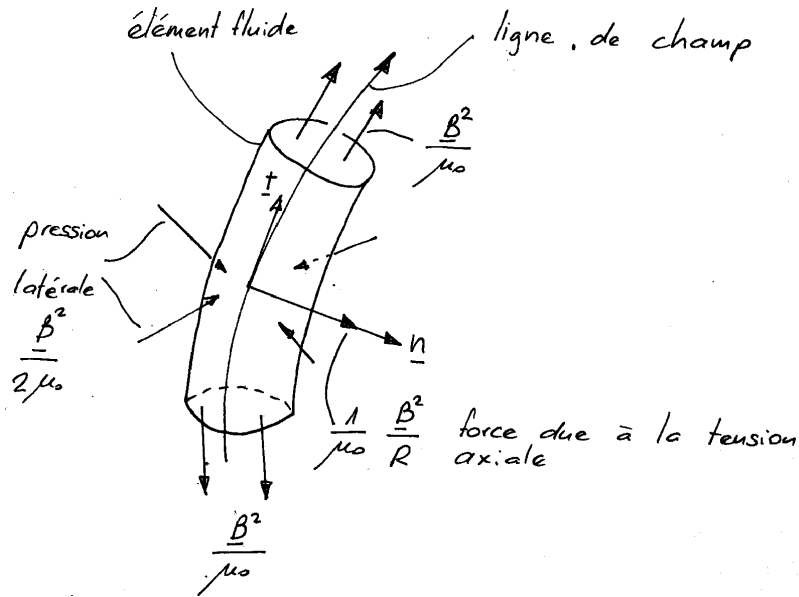


Figure 60: Tensions \parallel et \perp dans un champ magnétique avec courbure des lignes de champ.

9.6 Ondes dans le modèle de la MHD idéale

Les équations de la MHD idéale peuvent être combinées et réduites dans le système suivant:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0; \quad \rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\nabla p + \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}; \quad (436)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}); \quad \frac{d}{dt}(p\rho^{-\gamma}) = 0;^{38} \quad (437)$$

Ceci est un système de 8 équations et 8 inconnues: ρ , p , \mathbf{u} , \mathbf{B} .

Nous allons linéariser ce système d'équations en supposant de petites perturbations d'un équilibre pour un plasma uniforme et avec une vitesse fluide

³⁸En récrivant l'équation de continuité comme:

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \nabla \cdot \mathbf{u}$$

on obtient

$$\frac{dp}{dt} + \gamma p \nabla \cdot \mathbf{u} = 0.$$

nulle à l'équilibre.

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1(\mathbf{x}, t); \quad \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}_1(\mathbf{x}, t); \quad (438)$$

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \rho_0 + \rho_1(\mathbf{x}, t); \quad p(\mathbf{x}, t) = p_0 + p_1(\mathbf{x}, t); \quad (439)$$

Le système d'équations linéarisé devient:

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot \mathbf{u}_1 = 0; \quad \rho_0 \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t} = -\nabla p_1 + \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \mathbf{B}_1) \times \mathbf{B}_0; \quad (440)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u}_1 \times \mathbf{B}_0); \quad p_1 = \frac{\gamma p_0}{\rho_0} \rho_1 \equiv c_s^2 \rho_1;^{39} \quad (441)$$

La grandeur $c_s \equiv \sqrt{\gamma p_0 / \rho_0}$ est la *vitesse d'une onde sonore*. Après élimination de p_1 et en faisant une transformation de Fourier (c.f. paragraphe "Technique mathématique dans le chapitre "Ondes dans un plasma dans le modèle à deux fluides) il vient:

$$\omega \rho_1 - \rho_0 \mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_1 = 0; \quad (442)$$

$$\omega \rho_0 \mathbf{u}_1 = \mathbf{k} \rho_1 c_s^2 - \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{k} \times \mathbf{B}_1) \times \mathbf{B}_0; \quad (443)$$

$$\omega \mathbf{B}_1 = -\mathbf{k} \times (\mathbf{u}_1 \times \mathbf{B}_0); \quad (444)$$

où nous avons supposé une dépendance $\sim e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})}$ pour les grandeurs perturbées.

9.6.1 L'onde d'Alfvén de cisaillement (Shear Alfvén Wave)

Sans perte de généralités on peut choisir $\mathbf{B}_0 = B_0 \mathbf{e}_z$, comme montré sur la Figure 61. Considérons le cas particulier suivant: $k_y = 0$, $u_{1x} = u_{1z} = 0$, c.à d.:

$$\mathbf{k} = (k_x, 0, k_z) \quad (445)$$

³⁹Des équations (437) et (439) on obtient

$$(p_0 + p_1)(\rho_0 + \rho_1)^{-\gamma} = p_0 \rho_0^{-\gamma} \Rightarrow (p_0 + p_1) \left(1 - \gamma \frac{\rho_1}{\rho_0}\right) = p_0$$

A l'ordre 'zero' (c.à.d. à l'équilibre, on néglige les perturbations avec un indice '1') on obtient simplement $p_0 \equiv p_0$, par contre, au premier ordre:

$$p_1 = \gamma p_0 \frac{\rho_1}{\rho_0}$$

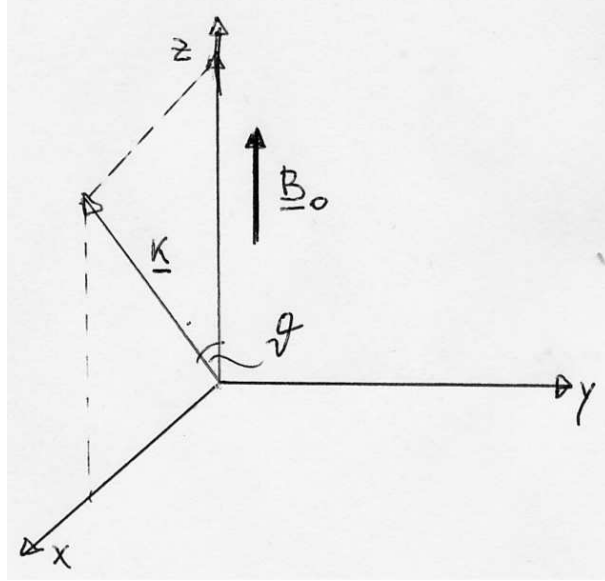


Figure 61: Géométrie considérée pour l'étude des ondes MHD.

$$\mathbf{u} = (0, u_y, 0) \quad (446)$$

On va traiter le cas $u_{1x} \neq 0 \neq u_{1z}$ plus tard.

L'équation (443) devient:

$$\omega \rho_0 u_y = -\frac{1}{\mu_0} [(\mathbf{k} \times \mathbf{B}_1) \times \mathbf{B}_0] = \quad (447)$$

$$= (\mathbf{k} \times \mathbf{B}_1) \times \mathbf{B}_0 = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ (\mathbf{k} \times \mathbf{B}_1)_x & (\mathbf{k} \times \mathbf{B}_1)_y & (\mathbf{k} \times \mathbf{B}_1)_z \\ 0 & 0 & B_0 \end{vmatrix} = \quad (448)$$

$$= \frac{B_0}{\mu_0} (\mathbf{k} \times \mathbf{B}_1)_x = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ k_x & 0 & k_z \\ B_{1x} & B_{1y} & B_{1z} \end{vmatrix} = -\frac{B_0}{\mu_0} k_z B_{1y} \quad (449)$$

Et l'équation (444) donne:

$$-\omega B_{1y} = [\mathbf{k} \times (\mathbf{u}_1 \times \mathbf{B}_0)]_y = [\mathbf{k} \times \hat{x} B_0 u_{1y}]_y = B_0 k_z u_{1y} \quad (450)$$

Le système d'équations (442),(443),(444) peut être écrit de la manière suiv-

ante:

$$\rho_1 = 0, \quad (451)$$

$$\omega \rho_0 u_{1y} + \frac{k_z B_0}{\mu_0} B_{1y} = 0, \quad (452)$$

$$k_z B_0 u_{1y} + \omega B_{1y} = 0, \quad (453)$$

où (452) et (453) peuvent être réécrites sous la forme:

$$\mathbf{A}(\omega, \mathbf{k}) \cdot \begin{pmatrix} u_{1y} \\ B_{1y} \end{pmatrix} = 0, \quad \text{avec} \quad \mathbf{A}(\omega, \mathbf{k}) = \begin{pmatrix} \omega \rho_0 & \frac{k_z B_0}{\mu_0} \\ k_z B_0 & \omega \end{pmatrix}. \quad (454)$$

La solution non-triviale ($u_{1y} \neq 0 \neq B_{1y}$) est obtenue en annulant le déterminant de \mathbf{A} ($\det \mathbf{A} = 0$).

Ce qui donne:

$$\omega^2 = \frac{B_0^2}{\rho_0 \mu_0} k_z^2 \equiv c_A^2 k_z^2 = c_A^2 k^2 \cos^2 \theta, \quad (455)$$

où $c_A \equiv B_0 / \sqrt{\mu_0 \rho_0}$ est la *vitesse d'Alfvén*. Des valeurs typiques de cette vitesse sont:

Magnetosphère:

$$c_A \sim \frac{5 \cdot 10^{-8}}{\sqrt{1.7 \cdot 10^{-27} \times 10^6 \times 4\pi \cdot 10^{-7}}} \sim 10^6 \text{ m/s}. \quad (456)$$

Tokamak:

$$c_A \sim \frac{3}{\sqrt{1.7 \cdot 10^{-27} \times 10^{20} \times 4\pi \cdot 10^{-7}}} \sim 6 \cdot 10^6 \text{ m/s}. \quad (457)$$

La solution (455) est appelée *onde Alfvén* (en anglais: *shear Alfvén wave*) où *onde Alfvén non-compressionnelle* puisqu'il n'y a pas de perturbation de densité:

$$\rho_1 = \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_1}{\omega} = 0, \quad (458)$$

Ceci est fondamentalement différent que dans le cas d'une onde sonore. De plus on peut remarquer que:

- La vitesse, v_α , des particules α nées avec une énergie cinétique de 3.5 MeV est telle que $v_\alpha > c_A$, ce qui permet aux α de devenir

*résonnants*⁴⁰ avec les ondes Alfvén lors de leurs ralentissement collisionnel dans un réacteur de fusion.

- La première observation des ondes Alfvén a été faite dans l'espace, et par la suite dans un plasma de mercure (densité ρ_0 élevée \rightarrow longueur d'onde λ petite: ce qui facilite la mesure dans un plasma fini de laboratoire).
- Les ondes Alfvén sont équivalentes à l'onde d'une corde de masse par unité de longueur M soumise à une tension S .

$$M \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = S \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} \quad \Longrightarrow \quad \omega^2 = \frac{S}{M} k_z^2 \quad (459)$$

9.6.2 L'onde magnétozonique

Considérons maintenant le cas où $u_{1x} \neq 0$, $u_{1y} = 0$, $u_{1z} \neq 0$. En choisissant $B_{1y} = 0$ et avec notre choix initial $\mathbf{B}_0 = B_0 \mathbf{e}_z$ et $k_y = 0$ on obtient de (444)

$$\mathbf{B}_1 = \frac{u_{1x} B_0}{\omega} (\mathbf{k} \times \mathbf{e}_y). \quad (460)$$

En utilisant ρ_1 de (442) et \mathbf{B}_1 dans (460) in (443) on obtient un système linéaire pour u_{1x} and u_{1z} . Comme avant ce système possède une solution non-triviale si le déterminant des coefficients de la matrice s'annule. Après un peu d'algèbre on obtient la relation de dispersion:

$$\omega^4 - \omega^2 k^2 (c_A^2 + c_s^2) + k_z^2 k^2 c_A^2 c_s^2 = 0, \quad (461)$$

qui a comme solution:

$$\omega^2 = \frac{1}{2} (c_A^2 + c_s^2) k^2 \pm \sqrt{\frac{1}{4} (c_A^2 + c_s^2)^2 k^4 - c_A^2 c_s^2 k^2 k_z^2}. \quad (462)$$

On peut remarquer que:

$$\left(\frac{c_s}{c_A} \right)^2 = \frac{\gamma p_0 \mu_0 \rho_0}{\rho_0 B_0^2} = \frac{\gamma p_0}{2 \frac{B_0^2}{2\mu_0}} = \frac{\gamma}{2} \beta, \quad (463)$$

⁴⁰Dans un modèle cinétique (c.f Cours de Physique des Plasmas II), la condition $v_{\text{particle}} = v_\alpha \sim v_{\text{ph}}$ rend possible une forte interaction onde-particule avec un échange d'énergie. Ceci peut donner lieu à des instabilités et la trajectoires des particules peut être perturbée par l'onde.

Avec β étant le rapport entre la pression thermique et la pression magnétique (équation (433)). Pour beaucoup de plasmas d'intérêt on a $\beta \ll 1$, ce qui implique $c_s \ll c_A$. Dans cette limite la solution “+” de (462) devient:

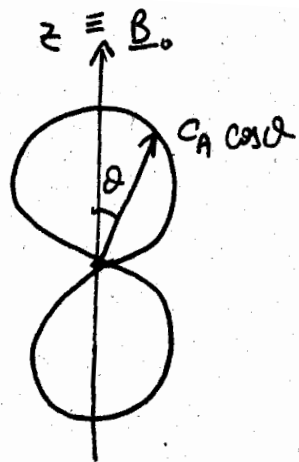
$$\omega^2 \simeq k^2 c_A^2. \quad (464)$$

Cette solution est appelée *onde rapide* (fast wave) où *onde Alfvén compressive*.⁴¹ Pour la solution “-” on trouve *l'onde lente* où *onde magnéto-sonique*

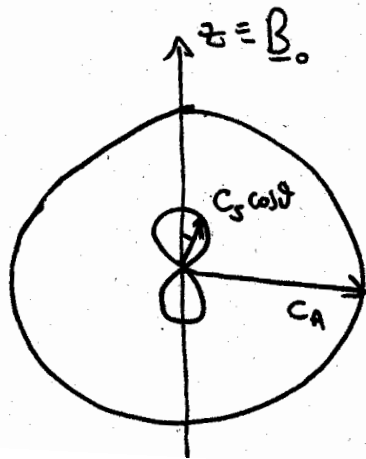
$$\omega^2 \simeq c_s^2 k_z^2 = k^2 c_s^2 \cos^2 \theta. \quad (465)$$

Une manière utile de représenter les différentes solutions est de représenter la surface parcourue par le vecteur vitesse de phase $\omega \mathbf{k}/k^2$ en fonction de l'angle entre le champ d'équilibre \mathbf{B}_0 et le vecteur d'onde \mathbf{k} (Figure 62).

⁴¹ $\rho_1 \neq 0 \iff \nabla \cdot \mathbf{u}_1 \neq 0$



Shear Alfvén



Compressional Alfvén
and
magneto-sonic
waves

Figure 62: Ondes Alfvén

Les conclusions générales suivantes peuvent être tirées:

- Les 3 ondes que nous avons trouvées sont *tous* les modes possibles d'oscillation d'un plasma (infini) dans le cadre du modèle de la MHD idéale.
- On remarquera que dans le cadre d'un plasma infini, uniforme, nous avons trouvé des solutions stables pour les 3 ondes. Autrement dit, pour un vecteur d'onde \mathbf{k} avec des composantes réelles nous avons toujours une solution réelle de ω .
- On verra qu'en présence de gradients ($\nabla p_0 \neq 0$) et/ou de courants ($\mathbf{j}_0 \neq 0$) ce résultat n'est plus valable, pour un vecteur d'onde \mathbf{k} avec des composantes réelles on peut trouver des solutions avec ω complexe ce qui peut donner lieu à des instabilités. Dans un Tokamak, nous avons un plasma, magnétisé, fini, en présence de courants et de gradients de pression, il est donc crucial d'étudier les critères de stabilité (signe de la partie imaginaire de ω) de ces configurations dans le cadre de la MHD. Avec la dépendance $\sim e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})}$, des solutions avec $\text{Im}(\omega) = \omega_I < 0$ sont des solutions instables.
- Si on relâche les hypothèses de la MHD plusieurs autres modes d'oscillation peuvent apparaître, comme par exemple lorsqu'on sépare la dynamique des électrons et des ions. Pour décrire ces modes d'oscillation il faut utiliser des modèles plus complets comme par exemple le modèle à plusieurs fluides où le modèle cinétique. Dans le cadre de ce cours nous avons utilisé le modèle à deux fluides pour un plasma uniforme non-magnétisé.

10 Equilibre et stabilité de plasmas confinés magnétiquement

10.1 Introduction

Nous désirons étudier l'équilibre des forces d'un plasma confiné par des champs magnétiques. Les équations de base sont celles de la MHD idéale:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (466)$$

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right] = -\nabla p + \mathbf{j} \wedge \mathbf{B} \quad (467)$$

$$\frac{d}{dt}(p\rho^{-\gamma}) = 0 \quad (468)$$

$$\nabla \wedge \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (469)$$

$$\nabla \wedge \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} \quad (470)$$

$$\mathbf{E} + \mathbf{u} \wedge \mathbf{B} = 0 \quad (471)$$

10.2 Equilibre statique

La *condition d'équilibre* sur un élément fluide se définit par la condition $\frac{\partial}{\partial t} = 0$. En plus on suppose un équilibre statique ce qui signifie que la vitesse fluide à l'équilibre est nulle, $\mathbf{u}_0 = 0$.

Les équations d'équilibre statique seront donc:

$$\nabla p_0 = \mathbf{j}_0 \wedge \mathbf{B}_0 \quad (472)$$

$$\nabla \wedge \mathbf{B}_0 = \mu_0 \mathbf{j}_0 \quad (473)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}_0 = 0 \quad (474)$$

Notion de surface magnétique

Une *surface magnétique* est une surface qui est tangente en tout point au champ magnétique (c.f. Figure 63). Soit $\Psi(\mathbf{r}) = \text{constante}$, l'équation d'une surface⁴² magnétique correspondante au champ magnétique $\mathbf{B}_0(\mathbf{r})$. Par dé-

⁴²L'expression mathématique d'une surface est $f(\mathbf{r}) = f(x, y, z) = \text{constante}$ où f est une fonction scalaire.

finition de la surface magnétique nous avons donc:

$$\nabla\Psi \cdot \mathbf{B}_0 = 0 \quad (475)$$

A l'équilibre, les surfaces $p_0(\mathbf{r}) = \text{constante}$, où p_0 est la pression, sont aussi des surfaces magnétiques:

$$\nabla p_0 \cdot \mathbf{B}_0 = (\mathbf{j}_0 \wedge \mathbf{B}_0) \cdot \mathbf{B}_0 = 0 \quad (476)$$

Les isobares (surfaces où la pression est constante) sont des surfaces magnétiques.

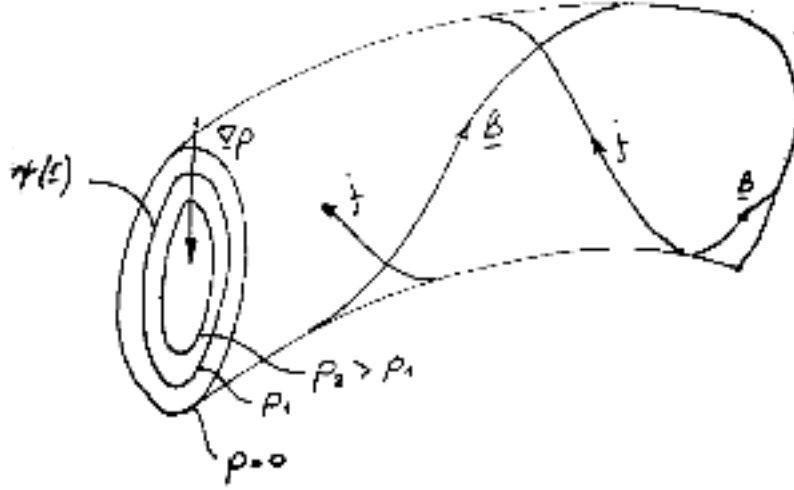


Figure 63: Surfaces magnétiques $\Psi(\mathbf{r})$, surface isobares $p_0(\mathbf{r}) = \text{cte.}$, surfaces de courant.

Si nous définissons de la même manière les surfaces de courant, nous voyons que les surfaces $p_0(\mathbf{r}) = \text{constante}$ sont aussi des surfaces de courant:

$$\nabla p_0 \cdot \mathbf{j}_0 = (\mathbf{j}_0 \wedge \mathbf{B}_0) \cdot \mathbf{j}_0 = 0 \quad (477)$$

Le courant passe donc entre deux surfaces magnétiques.

On discutera certains cas simples dans la section 11 de ce chapitre.

10.3 Conditions aux limites

Les plasmas de laboratoire étant de taille finie, il est important de considérer les solutions des équations de la MHD idéale ((466) à (471)) avec des conditions aux limites.

Dans le cas le plus général, le plasma est contenu dans une enceinte à vide qui est constituée d'un métal conducteur. On suppose que la paroi de l'enceinte à vide a une conductibilité infinie⁴³. Dans le cas où le plasma est séparé de la paroi par une couche de vide (voir figure 64) nous devons distinguer deux groupes d'équations : celles qui décrivent le plasma et celles qui décrivent la couche de vide. Dans le plasma ce sont les équations de la MHD idéale ((466) à (471)). Dans le vide ce sont les équations de Maxwell dans le vide et à basse fréquence (on néglige le courant de déplacement):

$$\nabla \wedge \mathbf{E}_v = -\frac{\partial \mathbf{B}_v}{\partial t} \quad (478)$$

$$\nabla \wedge \mathbf{B}_v = 0 \quad (479)$$

La situation décrite dans la figure 64 est celle d'un réacteur de fusion.

A partir des conditions d'équilibre statique, les variables dynamiques linéarisées s'expriment de la manière suivante:

- dans le plasma⁴⁴:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) &= 0 + \mathbf{u}_1(\mathbf{r}, t) \\ p(\mathbf{r}, t) &= p_0(\mathbf{r}_0) + p_1(\mathbf{r}, t) \\ \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= 0 + \mathbf{E}_1(\mathbf{r}, t) \\ \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{B}_0(\mathbf{r}_0) + \mathbf{B}_1(\mathbf{r}, t) \\ \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{J}_0(\mathbf{r}_0) + \mathbf{J}_1(\mathbf{r}, t) \end{aligned} \quad (480)$$

où l'indice 0 indique la valeur d'équilibre et l'indice 1 la perturbation par rapport à l'équilibre.

- dans le vide

$$\mathbf{B}_v(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}_{v0}(\mathbf{r}_0) + \mathbf{B}_{v1}(\mathbf{r}, t) \quad (481)$$

⁴³ Il faut noter que dans le cas réel, la conductibilité de la coque est finie. Dans ce cas le champ magnétique diffuse dans la coque dans une échelle de temps de l'ordre de $\tau_{coque} \sim \mu_0 \sigma L^2$, avec L étant l'épaisseur de la coque. L'approximation de conductibilité parfaite de la coque est valable pourvu que les temps caractéristiques des instabilités du plasma τ_p soit beaucoup plus rapides que τ_{coque} ($\tau_p \ll \tau_{coque}$), ce qui est généralement satisfait dans le cadre du modèle de la MHD idéale. Pour des temps long par rapport à $t > \tau_{coque}$ le plasma doit être confiné par des champs magnétiques créés par des courants externes.

⁴⁴Puisqu'on a supposé un équilibre statique (c.à.d $\mathbf{u}_0 = 0$), à partir de l'équation de la MHD idéale on a que le champ électrique à l'équilibre est nul ($\mathbf{E}_0 = 0$).

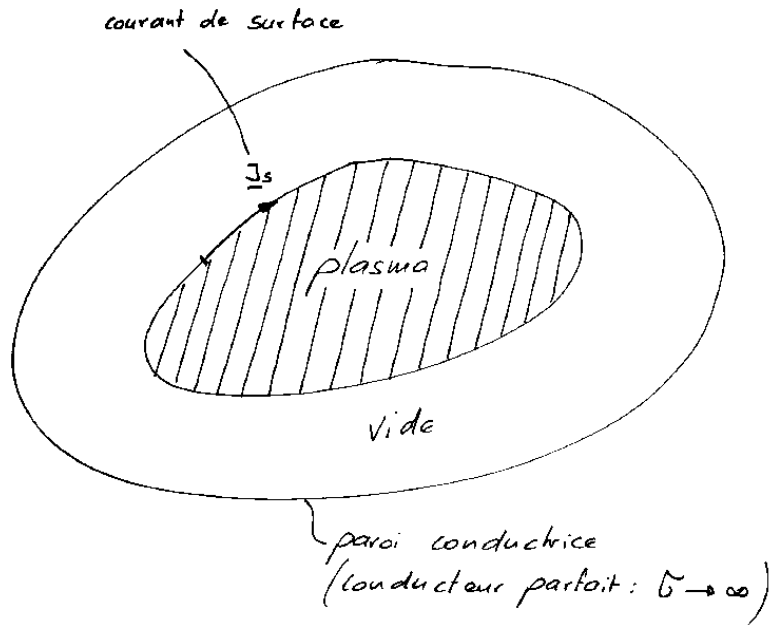


Figure 64: Plasma séparé de la coque conductrice par une couche de vide.

10.3.1 Conditions aux limites interface vide-coque

Soit \mathbf{n}_w le vecteur normal à la paroi pointant vers l'extérieur. Sur cette interface, la continuité de la composante tangentielle du champ électrique est:

$$\mathbf{n}_w \wedge \mathbf{E}_{v1}|_{paroi} = 0 \quad (482)$$

puisque dans la coque le champ électrique est nul vu que l'on suppose la coque comme un conducteur parfait (conductibilité infinie).

A partir de l'équation $\nabla \wedge \mathbf{E}_{v1} = -\partial_t \mathbf{B}_{v1}$, (482) devient:

$$\mathbf{n}_w \cdot \partial_t \mathbf{B}_{v1} = 0 \quad (483)$$

En supposant $\mathbf{B}_{v1}(\mathbf{r}, t) = \tilde{\mathbf{B}}_{v1}(\mathbf{r})e^{i\omega t}$ (484) devient:

$$i\omega \mathbf{n}_w \cdot \tilde{\mathbf{B}}_{v1} = 0 \quad (484)$$

ce qui signifie que la composante normale de la perturbation de champ magnétique est nulle.

10.3.2 Conditions aux limites interface plasma-vide

A partir des équations $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ et $\nabla \wedge \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$, les conditions de continuité des composantes normales et tangentielles de \mathbf{B} sont respectivement:

$$[\mathbf{n} \cdot \mathbf{B}]_p^v \equiv \mathbf{n} \cdot \mathbf{B}_v - \mathbf{n} \cdot \mathbf{B}_p = 0 \quad (485)$$

$$[\mathbf{n} \wedge \mathbf{B}]_p^v = \mu_0 \mathbf{J}_s \text{ où } \mathbf{J}_s \text{ est un courant de surface} \quad (486)$$

Si $\mathbf{J}_s = 0$, on a la continuité des composantes tangentielles de \mathbf{B} :

$$[\mathbf{n} \wedge \mathbf{B}]_p^v = 0 \quad (487)$$

A partir de l'équation de Newton on peut montrer qu'il y a aussi continuité de la pression totale:

$$\left[p + \frac{\mathbf{B}^2}{2\mu_0} \right]_p^v = 0 \quad (488)$$

Dans le référentiel d'un élément fluide qui bouge avec l'interface plasma-vide, la continuité des composantes tangentielles de \mathbf{E}'_1 devient⁴⁵:

$$[\mathbf{n}_0 \wedge \mathbf{E}'_1]_p^v = \mathbf{n}_0 \wedge \mathbf{E}'_{v1} - \mathbf{n}_0 \wedge \mathbf{E}'_{p1} = \mathbf{n}_0 \wedge \mathbf{E}'_{v1} = 0 \quad (489)$$

puisque dans la MHD idéale $\mathbf{E}'_{p1} = 0$.

Dans le référentiel du laboratoire on a:

$$\mathbf{E}'_{v1} = \mathbf{E}_{v1} + \mathbf{u}_1 \wedge \mathbf{B}_v \quad (490)$$

et (489) devient:

$$\mathbf{n}_0 \wedge \mathbf{E}_{v1} = -\mathbf{n}_0 \wedge (\mathbf{u}_1 \wedge \mathbf{B}_v) \quad (491)$$

10.3.3 Cas où la surface du plasma touche la paroi conductrice

La géométrie est illustrée dans la figure 65. Cette situation n'est pas celle dans un réacteur à fusion. Le contact avec la paroi conductrice amènerait à la formation d'impuretés qui diffuseraient dans le plasma et qui amèneraient à un refroidissement. Nous supposons que la paroi est à une conductibilité électrique infinie. Soit \mathbf{n}_w le vecteur normal à la paroi pointant vers l'extérieur.

⁴⁵Il faut faire attention que la surface du plasma peut se déformer et donc le vecteur normal à cette surface n'est pas constant. On note la normal à la surface non-déformée par \mathbf{n}_0 .

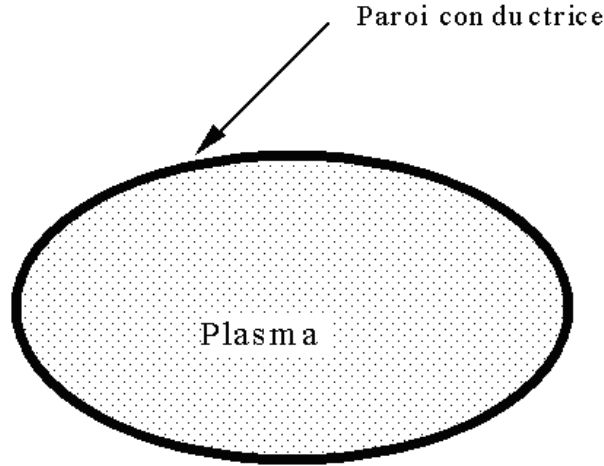


Figure 65: Plasma touchant l'enceinte parfaitement conductrice

Les conditions sur la coque de conductibilité infinie sont:

- la composante tangentielle du champ électrique perturbé, \mathbf{E}_{p1} , est nulle

$$(\mathbf{n}_w \wedge \mathbf{E}_{p1})_{Paroi} = 0 \quad (492)$$

- la composante normale de \mathbf{B}_{p1} est nulle

$$(\mathbf{n}_w \cdot \mathbf{B}_{p1})_{Paroi} = 0 \quad (493)$$

A partir de l'équation d'Ohm (471) nous dérivons une condition sur la perturbation de la vitesse \mathbf{u}_1 sur la paroi.

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_w \wedge \mathbf{E}_{p1} &= -\mathbf{n} \wedge (\mathbf{u}_1 \wedge \mathbf{B}_{p1}) = -(\mathbf{n} \cdot \mathbf{B}_{p1})\mathbf{u}_1 + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}_1)\mathbf{B}_{p1} = 0 \\ (\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}_1)_{Paroi} &= 0 \end{aligned} \quad (494)$$

La composante normale de \mathbf{u}_1 sur la paroi est nulle. Il n'y a pas d'écoulement vers la paroi.

Dans le cas général le plasma est séparé par une couche de vide entre le plasma et la coque. Pour le domaine de validité de l'approximation d'un coque avec conductibilité infinie se référer à la note 43.

11 Quelques équilibres linéaires

Dans ce paragraphe on va se restreindre à des configurations de champs qui peuvent être décrites en coordonnées cylindriques et qui sont telles que:

$$\partial_z = 0; \partial_\theta = 0; \partial_r \neq 0$$

on peut donc écrire:

$$\partial_r = \frac{d}{dr}$$

Les grandeurs avec un indice 0 sont des grandeurs imposées de l'extérieur. Toutes les grandeurs \mathbf{B} , p , \mathbf{J} qui sont solution des équations d'équilibre n'ont pas d'indice.

11.1 Le θ pinch

C'est une configuration linéaire, où le seul champ est un champ axial B_z imposé de l'extérieur. Un schéma de la configuration expérimentale d'un θ pinch est montré dans la figure 66. Le champ B_z induit un courant diamagnétique J_θ :

$$J_\theta = \left(\frac{\nabla \wedge \mathbf{B}}{\mu_0} \right)_\theta = -\frac{1}{\mu_0} \frac{dB_z}{dr} \quad (495)$$

C'est à cause de la direction du courant dans le plasma que l'on a appelé ce type de machine θ pinch (voir figure 67).

Dans un θ pinch, la seule dépendance est la dépendance radiale.

L'équation d'équilibre devient simplement⁴⁶:

$$\frac{dP}{dr} = J_\theta B_z = -\frac{B_z}{\mu_0} \frac{dB_z}{dr}$$

⁴⁶En coordonnées cylindriques, l'équation $\nabla \wedge \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$ devient:

$$\nabla \wedge \mathbf{B} = \left(\frac{\partial B_z}{r \partial \theta} - \frac{\partial B_\theta}{\partial z}, \frac{\partial B_r}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial r}, \frac{\partial(r B_\theta)}{r \partial r} - \frac{\partial B_r}{r \partial \theta} \right)$$

, La seule composante non nulle est:

$$\mu_0 j_\theta = -\frac{\partial B_z}{\partial r}$$

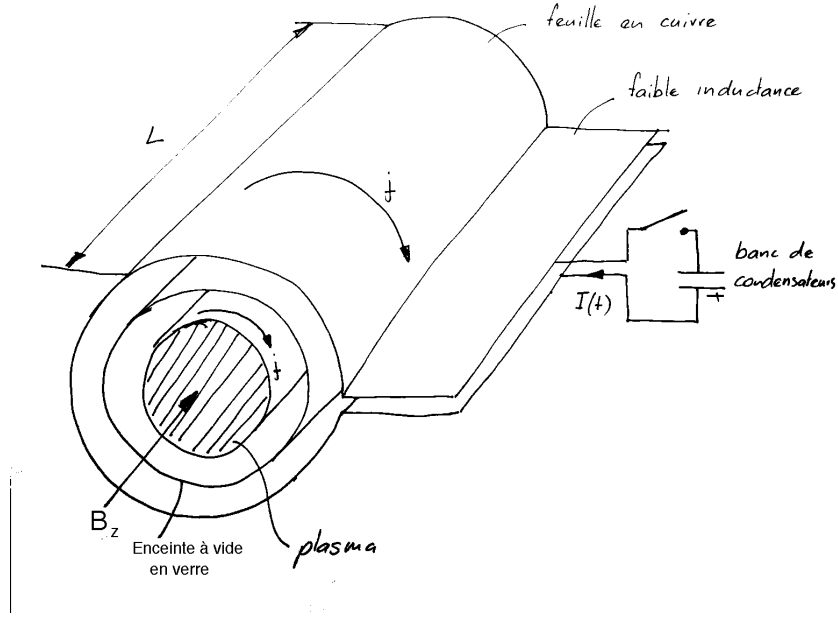


Figure 66: Configuration expérimentale d'un θ pinch. L'enceinte à vide en verre permet au champ de pénétrer à l'intérieur. Cette configuration est la première qui a produit un nombre substantiel de neutrons de fusion avec des paramètres du plasma: $T_i \sim 1 - 4\text{keV}$, $n \sim 1 - 2 \times 10^{22}\text{m}^{-3}$. Le plasma est pulsé avec une durée de vie $\tau_{plasma} \sim 10 - 50\mu\text{s}$. Le temps de confinement du plasma est de l'ordre $\tau_{conf} \sim \frac{L}{v_{th}} \sim 10\mu\text{s}$. Cette configuration magnétique est marginalement stable.

soit

$$\frac{d}{dr} \left(p + \frac{B_z^2}{2\mu_0} \right) = 0 \quad (496)$$

$$p(r) + \frac{B_z^2}{2\mu_0} = \frac{B_0^2}{2\mu_0} \quad (497)$$

B_0 est le champ appliqué.

Pour un profil de pression $p(r)$ donné, le profil de champ magnétique devient:

$$B_z(r) = B_0 \sqrt{1 - \frac{p(r)}{\frac{B_0^2}{2\mu_0}}} = B_0 \sqrt{1 - \beta(r)} \quad (498)$$

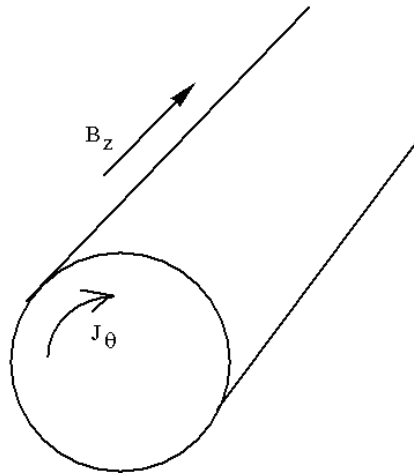


Figure 67: Géométrie d'un θ pinch

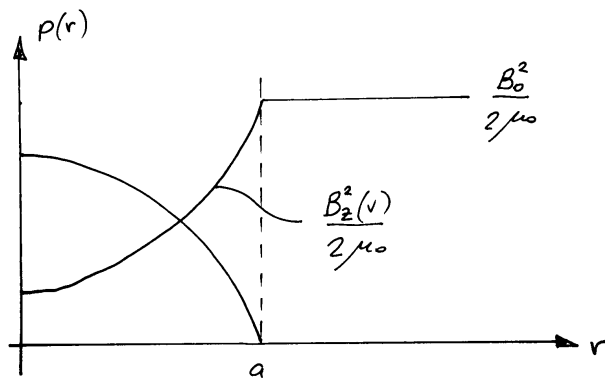


Figure 68: Profil de champ magnétique dans un θ -pinch pour un profil de pression donné et un champ magnétique B_0 donné.

L'effet diamagnétique, qui est une propriété intrinsèque à un plasma magnétisé (c.f section: "Mouvement d'une particule dans un champ magnétique lentement variable dans le temps $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0(t)$ "), est utilisé comme diagnostique pour la mesure de l'énergie thermique du plasma.

11.2 Le Z pinch

C'est une configuration où le champ magnétique est purement selon la direction θ et est créé par un courant dans la direction z (d'où le nom de Z pinch).

La relation entre J_z et B_θ est:

$$J_z = \frac{1}{\mu_0 r} \frac{d}{dr}(r B_\theta) \quad (499)$$

L'équation d'équilibre est:

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dr} = -J_z B_\theta &= -\frac{1}{\mu_0 r} B_\theta \frac{d}{dr}(r B_\theta) = -\frac{d}{dr} \left(\frac{B_\theta^2}{2\mu_0} \right) - \frac{B_\theta^2}{\mu_0 r} \\ \frac{d}{dr} \left(P + \frac{B_\theta^2}{2\mu_0} \right) + \frac{B_\theta^2}{\mu_0 r} &= 0 \end{aligned} \quad (500)$$

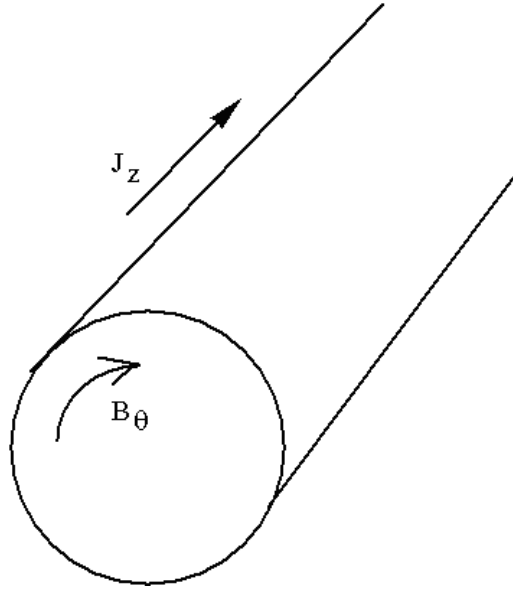


Figure 69: Géométrie du Z pinch

Le profil de pression $P(r)$ est lié au profil de B_θ (donc en fait au profil de courant J_z). Pour illustrer cela prenons le profil de B_θ appelé profil du pinch de Bennett:

$$B_\theta = \mu_0 \frac{I}{2\pi} \frac{r}{r^2 + a^2} \quad (501)$$

où I est le courant total qui passe à travers le pinch.

Par une simple application de la relation (499), nous trouvons le profil de

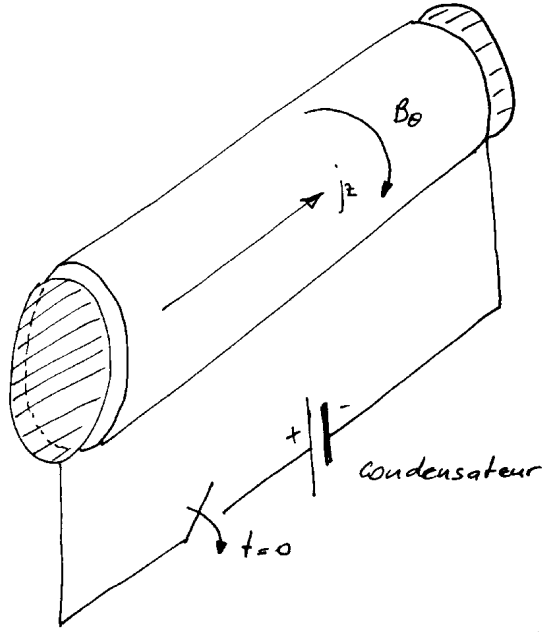


Figure 70: Configuration expérimentale d'un z-pinch.

courant J_z :

$$J_z = \frac{I}{2\pi r} \left(\frac{2r}{r^2 + a^2} - \frac{2r^3}{(r^2 + a^2)^2} \right) = \frac{I}{\pi} \frac{a^2}{(r^2 + a^2)^2} \quad (502)$$

Le profil de pression $P(r)$ est alors:

$$P(r) = -\frac{B_\theta^2}{2\mu_0} - \frac{1}{\mu_0} \int_0^r dr \frac{B_\theta^2}{r} = \mu_0 \frac{I^2}{8\pi^2} \frac{a^2}{(r^2 + a^2)^2} \quad (503)$$

L'énergie thermique, W_{th} , totale dans le plasma est:

$$W_{th} = \int_0^\infty dr 2\pi r P(r) = \mu_0 \frac{I^2}{8\pi}$$

Cette énergie thermique est comparable à l'énergie magnétique:

$$W_B = \int_0^\infty dr 2\pi r \frac{\mathbf{B}_\theta^2(r)}{2\mu_0}$$

En faisant une analyse de stabilité on peut montrer que ce type d'équilibre est fortement instable.

11.3 Le screw pinch ou "Tokamak droit"

La configuration linéaire qui se rapproche le plus de la configuration de champ magnétique du Tokamak, c'est une combinaison du θ -pinch et du Z-pinch. Comme illustré dans la figure 71, cette configuration "équivalent" à dérouler le tore de longueur $2\pi R_0$ en un cylindre droit de longueur $L = 2\pi R_0$.

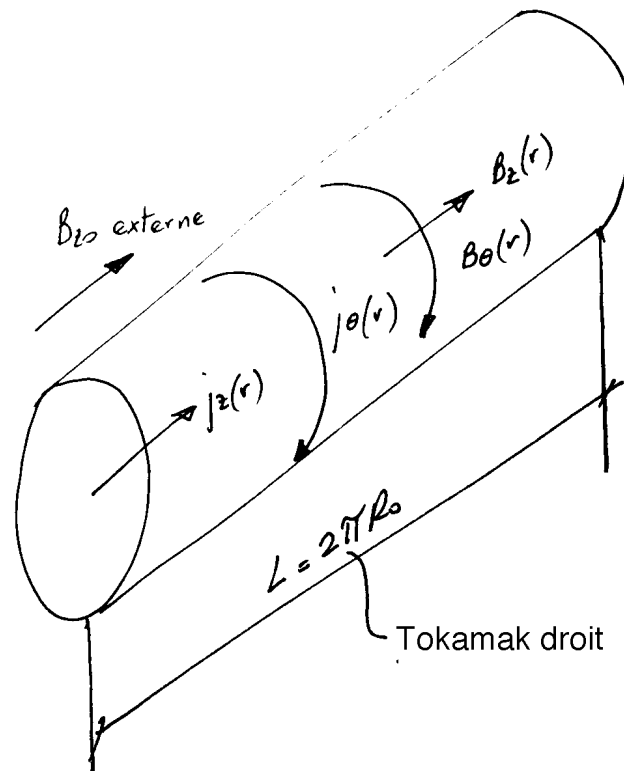


Figure 71: Configuration de champs magnétiques et de courants dans un "screw-pinch" où Tokamak droit.

Dans cette configuration on impose le champ magnétique externe, $\mathbf{B}_0 = B_0 \mathbf{e}_z$, et on génère un courant axial $\mathbf{j} = j_z \mathbf{e}_z$ (par exemple en appliquant un champ électrique axial externe).

Comme pour le Z-pinch la densité de courant j_z génère un champ magnétique azimuthal B_θ .

La combinaison des deux composantes de champ magnétique B_z et B_θ génère des lignes de champs hélicoïdales.

$$\mathbf{B}(r) = [0, B_\theta(r), B_z(r)]$$

L'équation d'équilibre est:

$$\frac{dP}{dr} = J_\theta B_z - J_z B_\theta \quad (504)$$

En remplaçant les expressions des densités de courant, il vient:

$$\frac{d}{dr} \left(P + \frac{B_z^2}{2\mu_0} + \frac{B_\theta^2}{2\mu_0} \right) = -\frac{B_\theta^2}{\mu_0 r} \quad (505)$$

Contrairement au cas du θ -pinch, dans le "screw-pinch" le courant j_θ peut être soit diamagnétique ou paramagnétique en fonction de l'amplitude du gradient de pression. Pour montrer cela réécrivons l'équation (504) de la manière suivante:

$$j_\theta = \frac{\frac{dp}{dr} + j_z B_\theta}{B_z} \quad (506)$$

En général le profil de pression est monotone et piqué au centre $\Rightarrow dp/dr < 0$. Pour $B_z > 0$ et $j_z > 0$ (imposés extérieurement), le signe de j_θ dépend donc du signe du numérateur dans l'équation (506).

- à basse pression:

$$\left| \frac{dp}{dr} \right| < j_z B_\theta \Rightarrow j_\theta > 0,$$

la densité de courant j_θ renforce le champ externe $B_z \Rightarrow$ **effet paramagnétique**.

- à haute pression:

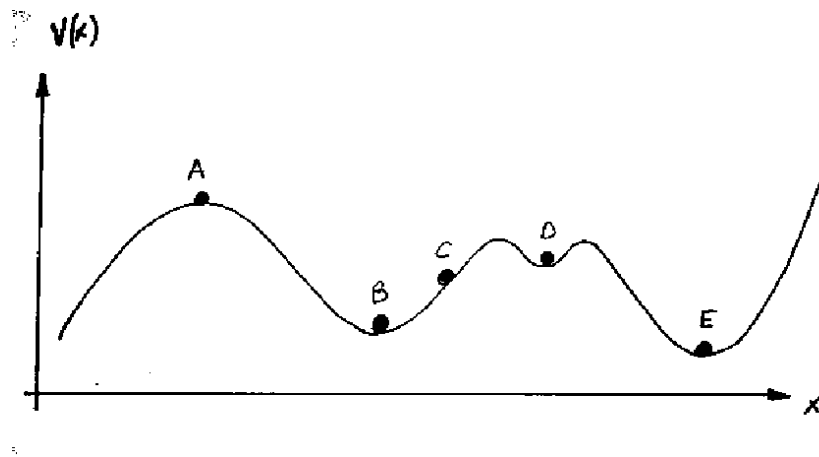
$$\left| \frac{dp}{dr} \right| > j_z B_\theta \Rightarrow j_\theta < 0,$$

la densité de courant j_θ diminue le champ externe $B_z \Rightarrow$ **effet diamagnétique**.

12 Stabilité linéaire d'un équilibre dans le modèle de la MHD idéale

12.1 Approche intuitive: analogie mécanique

Soit une particule de masse m dans un potentiel $V(x)$.



Puisque la force qui agit sur la particule dérive d'un potentiel on a:

$$\mathbf{F} = -\nabla V \quad \Rightarrow \quad F_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \quad (507)$$

A, B, D et E sont des positions d'équilibre puisque $\frac{\partial V}{\partial x} = 0$. C n'est pas une position d'équilibre et les positions d'équilibre A et B sont très différentes.

La stabilité linéaire d'un équilibre est donnée par la dynamique du système par rapport à des déplacements infinitésimaux (perturbations). Par rapport à cette définition de stabilité linéaire, le point D est linéairement stable, mais non-linéairement instable.

12.1.1 Critères de stabilité linéaire dans le cas 1D

1. Pour déterminer la stabilité linéaire d'un point d'équilibre, on étudie le mouvement par rapport à une perturbation infinitésimale.

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F(x_0) + \left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{x_0} (x - x_0) + \dots$$

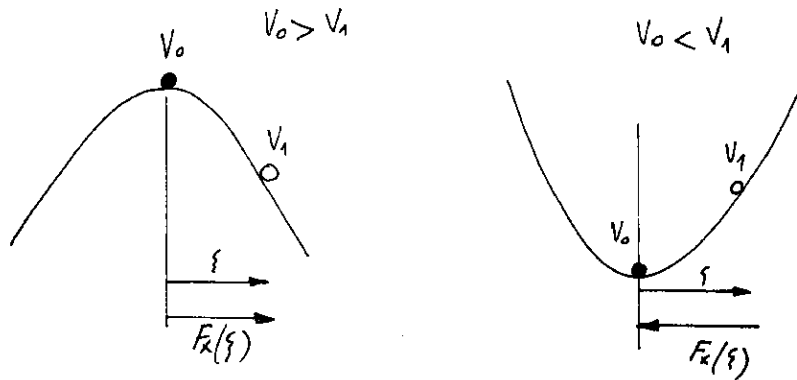


Figure 72: ξ est le déplacement infinitésimal par rapport à la position d'équilibre.

Or x_0 est un point d'équilibre, donc $F(x_0) = 0$.

Ainsi, pour un déplacement infinitésimal:

$$\xi = x - x_0, \quad m \frac{d^2 \xi}{dt^2} = F'(x_0) \xi, \quad \frac{d^2 \xi}{dt^2} - \underbrace{\frac{F'(x_0)}{m}}_{+\omega^2} \xi = 0$$

$$\Rightarrow \xi(t) = \xi_0 \exp \left[\left(\frac{F'(x_0)}{m} \right)^{1/2} t \right] = \xi_0 \exp[i\omega t]$$

$$F'(x_0) > 0 \Rightarrow \omega^2 < 0 \Rightarrow \xi(t) \propto \exp[|\omega|t] \quad \text{instable}$$

$$F'(x_0) < 0 \Rightarrow \omega^2 > 0 \Rightarrow \xi(t) \propto \exp[i\omega t] \quad \text{stable}$$

Le taux de croissance τ de l'instabilité est donné par $\tau = 1/\omega$.

2. Une autre manière d'étudier la stabilité d'un équilibre est d'étudier le signe de la perturbation de potentiel V_1 par rapport à V_0 (en posant $V_0 = 0$).

$$\begin{cases} V_1 > 0 & \text{équilibre linéairement stable} \\ V_1 = 0 & \text{équilibre linéairement marginalement stable} \\ V_1 < 0 & \text{équilibre linéairement instable} \end{cases}$$

Le critère de stabilité linéaire est valable pour des petites perturbation par rapport à la situation d'équilibre. Pour des perturbations importantes, telles

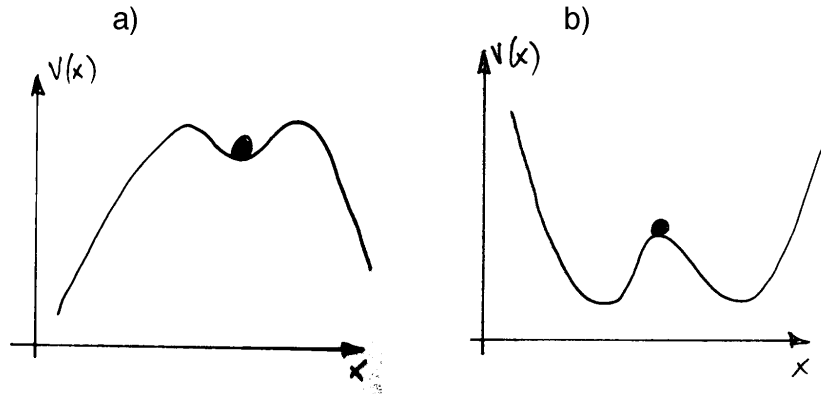


Figure 73: Figure a): équilibre linéairement stable et non-linéairement instable. Figure b): équilibre linéairement instable et non-linéairement stable.

que l'approximation linéaire n'est plus valable, on peut avoir des situations où un équilibre linéairement stable devient non-linéairement instable ou vice-versa. Pour un potentiel uni-dimensionnel, ces situations sont illustrées, dans la figure 73.

12.2 Linéarisation des équations de la MHD idéale

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right] = -\nabla p + \mathbf{j} \wedge \mathbf{B} \quad (508)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (509)$$

$$\frac{d}{dt}(p\rho^{-\gamma}) = 0 \quad (510)$$

$$\partial_t \mathbf{B} = \nabla \wedge (\mathbf{u} \wedge \mathbf{B}) \quad (511)$$

$$\nabla \wedge \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} \quad (512)$$

où dans (511) on a utilisé : $\mathbf{E} + \mathbf{u} \wedge \mathbf{B} = 0$.

De l'équation (509) on obtient:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \mathbf{u}) = \underbrace{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho + \rho(\nabla \cdot \mathbf{u})}_{\frac{d\rho}{dt}} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d\rho}{dt} = -\rho \nabla \cdot \mathbf{u} \quad (513)$$

en utilisant ce résultat dans (510) il vient:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(p\rho^{-\gamma}) &= \frac{dp}{dt}\rho^{-\gamma} - \gamma\rho^{-\gamma-1}\frac{d\rho}{dt}p \Rightarrow \frac{dp}{dt} - \frac{\gamma}{\rho}\frac{d\rho}{dt}p = 0 \\ \Rightarrow \frac{dp}{dt} &= \frac{\gamma}{\rho}\frac{d\rho}{dt}p = -\frac{\gamma}{\rho}\rho(\nabla \cdot \mathbf{u})p = -\gamma p \nabla \cdot \mathbf{u} \\ \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial t} &= -\mathbf{u} \cdot \nabla p - \gamma p \nabla \cdot \mathbf{u} \end{aligned} \quad (514)$$

En utilisant (513) et (514) le système d'équations devient:

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right] = -\nabla p + \mathbf{j} \wedge \mathbf{B} \quad (515)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\mathbf{u} \cdot \nabla p - \gamma p \nabla \cdot \mathbf{u} \quad (516)$$

$$\partial_t \mathbf{B} = \nabla \wedge (\mathbf{u} \wedge \mathbf{B}) \quad (517)$$

$$\nabla \wedge \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} \quad (518)$$

avec $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ comme condition initiale.

12.2.1 Conditions d'équilibre

$$\begin{aligned} \nabla p_0 &= \mathbf{j}_0 \wedge \mathbf{B}_0 \\ \nabla \wedge \mathbf{B}_0 &= \mu_0 \mathbf{j}_0 \end{aligned}$$

La solution de ces équations permet de partiellement de déterminer les quantités $p_0(\mathbf{r})$, $\mathbf{B}_0(\mathbf{r})$, et $\mathbf{j}_0(\mathbf{r})$.

Par exemple dans une configuration à symétrie cylindrique nous avons la condition d'équilibre:

$$\left[p + \frac{1}{2\mu_0} (\mathbf{B}_z + \mathbf{B}_\theta)^2 \right]' = -\frac{B_\theta^2}{r}$$

\Rightarrow nous avons trois profils $p(r)$, $B_z(r)$, $B_\theta(r)$, desquels deux peuvent être choisis arbitrairement.

12.2.2 Conditions au bord

Modèle: pour simplifier le problème on considère un plasma dans une coque de conductibilité infinie sans interface plasma-vide (c.f. Figure 65).

Nous avons donc comme conditions au bord les équations (492), (493) et (494) que l'on rappelle ici:

$$\mathbf{n}_w \wedge \mathbf{E}_1 = 0 \quad (519)$$

$$\mathbf{n}_w \cdot \partial_t \mathbf{B}_1 = 0 \quad (520)$$

$$\mathbf{n}_w \cdot \mathbf{u}_1 = 0 \quad (521)$$

où n_w est un vecteur normal à la surface de la coque.

12.2.3 Equations linéarisées et conditions au bord linéarisées

En remplaçant les équations (480) dans (515)-(518) il vient:

$$\rho_0 \partial_t \mathbf{u}_1 = -\nabla p_1 + \mathbf{j}_0 \wedge \mathbf{B}_1 + \mathbf{j}_1 \wedge \mathbf{B}_0 \quad (522)$$

$$\frac{\partial p_1}{\partial t} = -\mathbf{u}_1 \cdot \nabla p_0 - \gamma p_0 \nabla \cdot \mathbf{u}_1 \quad (523)$$

$$\partial_t \mathbf{B}_1 = \nabla \wedge (\mathbf{u}_1 \wedge \mathbf{B}_0) \quad (524)$$

$$\nabla \wedge \mathbf{B}_1 = \mu_0 \mathbf{j}_1 \quad (525)$$

Avec les conditions au bord (519)-(521)⁴⁷.

Dans le système d'équations ci-dessus on remarque que l'équation du mouvement dépend essentiellement du champ de vitesse $\mathbf{u}_1(\mathbf{r}, t)$, en effet:

$$\rho_0 \partial_t \mathbf{u}_1 = -\nabla p_1 + \mathbf{j}_0 \wedge \mathbf{B}_1 + \mathbf{j}_1 \wedge \mathbf{B}_0 \quad (526)$$

avec $p_1 = p_1(\mathbf{u}_1)$, $\mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_1(\mathbf{u}_1)$, $\rho_1 = \rho_1(\mathbf{u}_1)$ et $\mathbf{j}_1 = \mathbf{j}_1[\mathbf{B}_1(\mathbf{u}_1)]$ à partir des autres équations.

En différentiant l'équation de mouvement on pourrait faire apparaître explicitement la seule dépendance en \mathbf{u}_1 . C'est la méthode utilisée pour déterminer la relation de dispersion dans un plasma infini uniforme.

⁴⁷ Dans ce modèle (coque conductrice autour du plasma) \mathbf{n}_w est constant et il n'est pas nécessaire de le linéariser. Ceci n'est plus vrai dans un modèle où il y aurait une interface plasma-vide.

Dans un plasma fini et non-uniforme, l'intégration de ces équations se révèle plus intéressante.

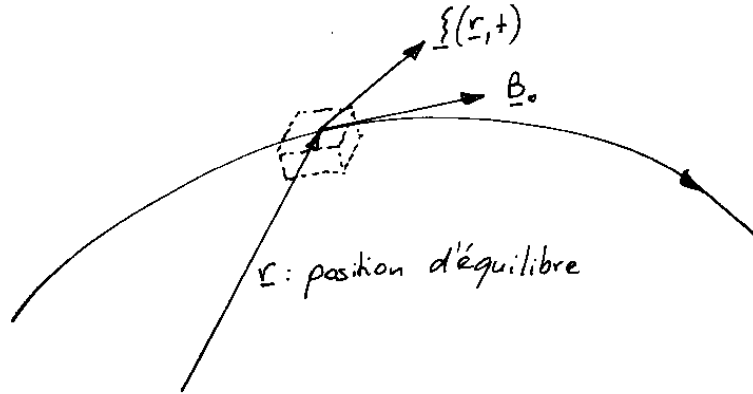


Figure 74: Vecteur déplacement $\xi(\mathbf{r}, t)$ d'un élément fluide par rapport à sa position d'équilibre.

On introduit une nouvelle variable:

un champ vectoriel de déplacement Lagrangien $\xi(\mathbf{r}, t)$.

$$\mathbf{u} = \frac{D\xi}{Dt} = \frac{\partial \xi}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\xi \quad (527)$$

qui est une expression hautement non-linéaire.

Dans le cadre d'une théorie linéaire, au premier ordre on aura:

$$\mathbf{u} \cong \frac{\partial \xi}{\partial t} = \mathbf{u}_1 \quad (528)$$

en utilisant cette expression dans les équations linéarisées il vient:

$$p_1 = -\xi \cdot \nabla p_0 - \gamma p_0 \nabla \cdot \xi \quad (529)$$

$$\mathbf{B}_1 = \nabla \wedge (\xi \wedge \mathbf{B}_0) \quad (530)$$

Notons que $\nabla \cdot \mathbf{B}_1 = 0$ est automatiquement satisfaite.

En introduisant ces équations dans l'équation du mouvement, il vient:

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \mathbf{F}(p_1(\xi), \mathbf{B}_1(\xi)) \quad (531)$$

avec la condition au bord:

$$\mathbf{n}_w \cdot \boldsymbol{\xi} = 0 \quad (532)$$

\mathbf{F} est un opérateur de force:

$$\mathbf{F}(\boldsymbol{\xi}) = -\nabla\Pi + \frac{1}{\mu_0}(\nabla \wedge \mathbf{B}) \wedge \mathbf{Q} + \frac{1}{\mu_0}(\nabla \wedge \mathbf{Q}) \wedge \mathbf{B} \quad (533)$$

où on définit les grandeurs p_1 et \mathbf{B}_1 de la manière suivante:

$$p_1 \equiv \Pi = -\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla p - \gamma p \nabla \cdot \boldsymbol{\xi} \quad (534)$$

et

$$\mathbf{B}_1 \equiv \mathbf{Q} = \nabla \wedge (\boldsymbol{\xi} \wedge \mathbf{B}) \quad (535)$$

Les définitions de Π et \mathbf{Q} permettent d'omettre l'indice 0 des grandeurs d'équilibre.

Dans le problème linéaire on a un système de 3 équations à 3 inconnues (ξ_1, ξ_2, ξ_3).

Dans le problème non-linéaire on avait les inconnues \mathbf{v} , \mathbf{B} , et p .

Puisque les grandeurs d'équilibre $p(\mathbf{r})$ et $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ ne dépendent pas du temps on peut écrire:

$$\boldsymbol{\xi}(\mathbf{r}, t) = \hat{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{r})e^{i\omega t} \quad (536)$$

$$\Rightarrow -\rho\omega^2 \hat{\boldsymbol{\xi}} = \mathbf{F}(\hat{\boldsymbol{\xi}}) \quad (537)$$

L'équation (537) avec la condition au bord (532) à la structure d'un problème aux valeurs propres:

$$-\omega^2 \hat{\boldsymbol{\xi}} = \rho^{-1} \mathbf{F}(\hat{\boldsymbol{\xi}}) \quad (538)$$

où ω^2 sont les valeurs propres de l'opérateur $\rho^{-1} \mathbf{F}(\hat{\boldsymbol{\xi}})$.

On peut montrer que l'opérateur $\rho^{-1} \mathbf{F}(\hat{\boldsymbol{\xi}})$ est auto-adjoint, donc les valeurs propres ω^2 sont réelles, ce qui implique que ω est soit purement réel (si $\omega^2 \geq 0$), soit purement imaginaire (si $\omega^2 < 0$). L'illustration graphique de ce résultat est montrée dans la figure 75.

Pour donner une interprétation physique aux différents termes de l'opérateur $\mathbf{F}(\boldsymbol{\xi})$ réécrivons-le sous la forme suivante:

$$\mathbf{F}(\boldsymbol{\xi}) = + \underbrace{\nabla(\gamma p \nabla \cdot \boldsymbol{\xi})}_A + \underbrace{\frac{1}{\mu_0}(\nabla \wedge \mathbf{Q}(\boldsymbol{\xi})) \wedge \mathbf{B}}_B + \underbrace{\nabla(\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla p) + \mathbf{j} \wedge \mathbf{Q}(\boldsymbol{\xi})}_C \quad (539)$$

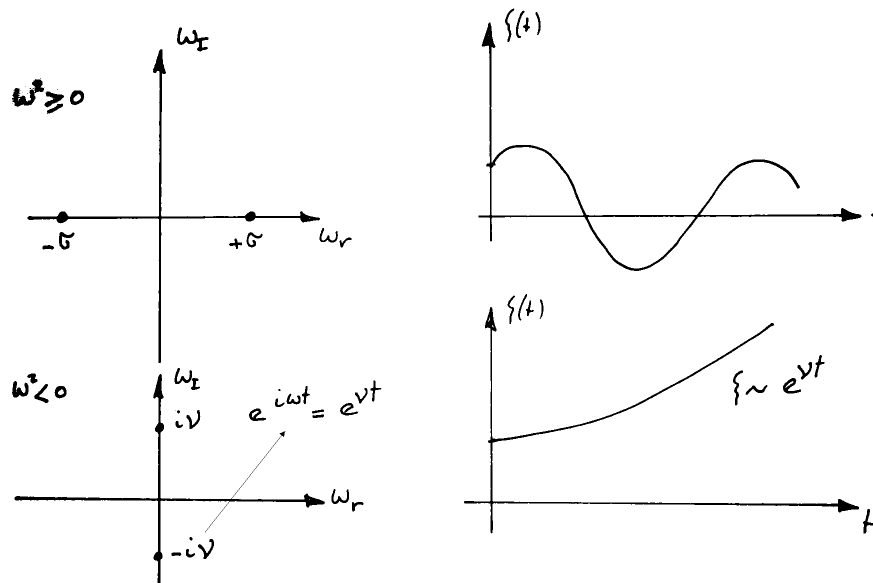


Figure 75: Relation entre les valeurs propres et la dépendance temporelle du vecteur $\xi(\mathbf{x}, t)$. Graphiques du haut: $\omega^2 > 0$, valeur propre stable. Graphique du bas: $\omega^2 < 0$ valeur propre instable.

A est associé aux ondes acoustiques, B aux ondes d'Alfvén; ces deux termes existent dans un plasma isotrope et infini. Ils sont stabilisants puisqu'on a vu que dans un plasma infini on obtient des valeurs propres $\omega^2 > 0$. C représente des termes qui apparaissent uniquement dans un plasma inhomogène. Ce sont la présence de gradients de pression et de courant qui sont responsables d'instabilités dans des plasmas inhomogènes (exemple: plasma de fusion thermonucléaire).

12.2.4 Principe d'énergie dans la MHD idéale

On a vu que le modèle de la MHD idéale satisfait la loi de conservation d'énergie suivante:

$$\int \frac{1}{2} \rho |\mathbf{u}|^2 dV + \int \left[\frac{p}{\gamma - 1} + \frac{|\mathbf{B}|^2}{2\mu_0} \right] dV = \text{constante}$$

où la première intégrale représente l'énergie cinétique et la deuxième l'énergie potentielle.

La linéarisation de l'énergie cinétique s'obtient en utilisant la définition du déplacement lagrangien (527) on a:

$$\Rightarrow |\mathbf{u}|^2 = \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial t} + o(\boldsymbol{\xi}^3) \quad (540)$$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2} \int \rho |\dot{\boldsymbol{\xi}}|^2 dV \quad (541)$$

La linéarisation de l'énergie potentielle s'obtient de la manière suivante:

à partir de l'équation $\rho \ddot{\boldsymbol{\xi}} = \mathbf{F}(\boldsymbol{\xi})$ multiplions à gauche et à droite par $\dot{\boldsymbol{\xi}}$ et intégrons sur le volume.

$$\underbrace{\int \rho \dot{\boldsymbol{\xi}} \cdot \ddot{\boldsymbol{\xi}} dV}_{\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \int \rho |\dot{\boldsymbol{\xi}}|^2 dV \right] = \frac{dT}{dt}} = \int \dot{\boldsymbol{\xi}} \cdot \mathbf{F}(\boldsymbol{\xi}) dV \quad (542)$$

De la conservation de l'énergie on a:

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{dV}{dt} = \int \dot{\boldsymbol{\xi}} \cdot \mathbf{F}(\boldsymbol{\xi}) dV \quad (543)$$

et en utilisant la propriété (opérateur auto-adjoint)

$$\int \boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{F}(\boldsymbol{\xi}) dV = \int \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{F}(\boldsymbol{\eta}) dV \quad (544)$$

on peut écrire

$$\begin{aligned} \int \dot{\boldsymbol{\xi}} \cdot \mathbf{F}(\boldsymbol{\xi}) dV &= \frac{1}{2} \int \dot{\boldsymbol{\xi}} \cdot \mathbf{F}(\boldsymbol{\xi}) dV + \frac{1}{2} \int \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{F}(\dot{\boldsymbol{\xi}}) dV \\ &= \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \int \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{F}(\boldsymbol{\xi}) dV \right] = -\frac{dV}{dt} \end{aligned} \quad (545)$$

$$\Rightarrow V(\boldsymbol{\xi}) = -\frac{1}{2} \int \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{F}(\boldsymbol{\xi}) dV \quad (546)$$

$V \geq 0$, stable

$V < 0$, instable⁴⁸

$$V(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{2} \int \left[\underbrace{\gamma p |\nabla \cdot \boldsymbol{\xi}|^2}_{\text{énergie acoustique}} + \underbrace{\frac{1}{\mu_0} |Q|^2}_{\text{énergie magnétique}} + \underbrace{(\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla p) \nabla \cdot \boldsymbol{\xi} + \mathbf{j} \cdot (\boldsymbol{\xi} \wedge \mathbf{Q})}_K \right] dV \quad (547)$$

$>0 \text{ stable}$

Le terme K est l'énergie associée aux gradients de pression, ∇p , et courant, \mathbf{j} . Ce terme peut être négatif donc donner lieu à des instabilités.

⁴⁸En faisant référence à l'analogie mécanique au début du chapitre on retrouve que $[\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{F}(\boldsymbol{\xi}) \leq 0]$ est une situation stable et le contraire donne lieu à une instabilité. Il est clair que dans un système continu c'est le signe de $V(\boldsymbol{\xi})$ dans sa formulation intégrale qui doit être utilisé.